



UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Cálculo

Temario de la asignatura

Licencia

Este trabajo está bajo una Licencia Creative Commons BY-NC-ND 4.0.

Permisos: Se permite compartir, copiar y redistribuir el material en cualquier medio o formato.

Condiciones: Es necesario dar crédito adecuado, proporcionar un enlace a la licencia e indicar si se han realizado cambios. No se permite usar el material con fines comerciales ni distribuir material modificado.



Cálculo

Ismael Sallami Moreno

<https://elblogdeismael.github.io>

Índice general

1	Números reales y aritmética de ordenador	7
1.1	El conjunto de los números reales	7
1.2	Errores	8
1.3	Funciones elementales	9
1.4	Ejercicios	10
2	Sucesiones y series	13
2.1	Sucesiones	13
2.2	Series	15
2.3	Ejercicios	17
3	Continuidad y derivabilidad	19
3.1	Continuidad	19
3.2	Derivabilidad	20
3.3	Extremos y representación de funciones	21
3.4	Métodos numéricos de resolución de ecuaciones	22
3.5	Ejercicios	23
4	Integrabilidad	25
4.1	La integral definida	25
4.2	El teorema fundamental y la regla de Barrow	26
4.3	Cálculo de primitivas	26
4.4	Integrales impropias	27
4.5	Aplicaciones de la integral	27
4.6	Aproximación numérica	28
4.7	Ejercicios	29
5	Interpolación numérica	31

5.1	El problema	31
5.2	El polinomio de Taylor	31
5.3	Interpolación de Lagrange	32
5.4	Interpolación de Newton	33
5.5	Error de interpolación	34
5.6	Ejercicios	34
6	Resolución de sistemas de ecuaciones	37
6.1	El problema	37
6.2	Eliminación gaussiana	37
6.3	Conicionamiento	39
6.4	Métodos iterativos	39
6.5	Ejercicios	40
7	Temario práctico	43
7.1	Maxima	43
7.2	Práctica 1. Números reales y errores	43
7.3	Práctica 2. Sucesiones y series	44
7.4	Práctica 3. Continuidad, derivabilidad y ceros	44
7.5	Práctica 4. Integración	45
7.6	Práctica 5. Interpolación	45
7.7	Práctica 6. Sistemas de ecuaciones	46
7.8	Sobre las memorias	46

Números reales y aritmética de ordenador

Tema 1 del programa. El conjunto de los números reales, los errores que aparecen al representarlos en una máquina, y las funciones elementales.

1.1 El conjunto de los números reales

$\mathbb{R}$ es un **cuerpo ordenado completo**, y las tres palabras cuentan. Cuerpo, porque se suma y se multiplica con las propiedades habituales; ordenado, porque el orden es compatible con las operaciones; y completo, que es lo que lo distingue de $\mathbb{Q}$.

Definición 1.1 (Axioma del supremo). Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente tiene supremo, es decir, una menor de sus cotas superiores.

La completitud es lo que hace que $\mathbb{R}$ no tenga huecos. En $\mathbb{Q}$, el conjunto $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ está acotado y no tiene supremo racional, porque $\sqrt{2}$ no es racional. Sin ese axioma no habría teorema de Bolzano, ni de Weierstrass, ni convergencia de sucesiones monótonas acotadas: **todo el tema 3 depende de él.**

Concepto	Definición
Cota superior de A	M tal que $x \leq M$ para todo $x \in A$
Supremo	la menor cota superior
Máximo	supremo que pertenece al conjunto
Ínfimo, mínimo	los análogos por abajo

La distinción entre supremo y máximo se ve en $(0, 1)$: su supremo es 1 y no tiene máximo. Es la diferencia entre «no se pasa de ahí» y «lo alcanza».

1.1.1 Valor absoluto y desigualdades

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Propiedad	Expresión
Desigualdad triangular	$ x + y \leq x + y $
Triangular inversa	$ x - y \leq x - y $
Producto	$ xy = x y $
Entornos	$ x - a < \delta \iff a - \delta < x < a + \delta$

La última fila es la que se usa constantemente: **el valor absoluto mide distancia**, y por eso las definiciones de límite y de continuidad se escriben con él.

1.2 Errores

Un ordenador no puede representar todos los reales: dispone de un número finito de bits. De ahí que todo cálculo lleve error, y que la asignatura empiece por medirlo.

1.2.1 Absoluto y relativo

Si $\tilde{x}$ aproxima a x :

$$E_a = |x - \tilde{x}|, \quad E_r = \frac{|x - \tilde{x}|}{|x|} \quad (x \neq 0)$$

Ejemplo 1.1 . Aproximar 1 000 000 por 1 000 001 da error absoluto 1 y relativo 10^{-6} . Aproximar 0,001 por 0,002 da error absoluto 0,001, mil veces menor, y relativo 1. El absoluto dice que la segunda aproximación es mejor y el relativo que es pésima; el que informa es el relativo.

1.2.2 Representación en coma flotante

$$x = \pm 0, d_1 d_2 \dots d_t \times \beta^e, \quad d_1 \neq 0$$

con base β , t dígitos de mantisa y exponente e acotado. Dos formas de ajustar un número al formato:

Método	Cómo	Error relativo máximo
Truncamiento	se descartan los dígitos sobrantes	β^{1-t}
Redondeo	se ajusta al más próximo	$\frac{1}{2}\beta^{1-t}$

El **epsilon de máquina**, ε_M , es el menor número que sumado a 1 da algo distinto de 1. En doble precisión vale $2^{-52} \approx 2,2 \times 10^{-16}$, que es la razón de las 16 cifras significativas.

Nota 1.1 . De ahí la regla que gobierna todo el cálculo numérico: **dos flotantes no se comparan con igualdad**. Se comprueba $|a - b| < \varepsilon$ con una tolerancia acorde a la magnitud de los números, porque el error de representación es relativo y no absoluto.

1.2.3 Propagación del error

Los errores no se quedan quietos: las operaciones los transmiten y algunas los amplifican.

Operación	Qué le pasa al error
Suma y resta	los errores absolutos se suman
Producto y cociente	los errores relativos se suman
$f(x)$	$E_a(f) \approx f'(x) E_a(x)$

La última fila define el **condicionamiento**: si $|f'(x)|$ es grande, un error pequeño en la entrada produce uno grande en la salida, y ninguna implementación puede arreglarlo. Un problema mal condicionado lo está por su naturaleza, no por el algoritmo.

1.2.4 La cancelación catastrófica

El fenómeno más importante del tema. Al restar dos números casi iguales, las cifras significativas coincidentes se cancelan y **el error relativo se dispara**.

Ejemplo 1.2 . Con cuatro cifras, $\sqrt{9002} \approx 94,88$ y $\sqrt{9000} \approx 94,87$. Su diferencia sale 0,01, con una sola cifra significativa: se han perdido tres.

Se evita reescribiendo la expresión para que no haya resta:

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{2}{189,75} = 0,010540$$

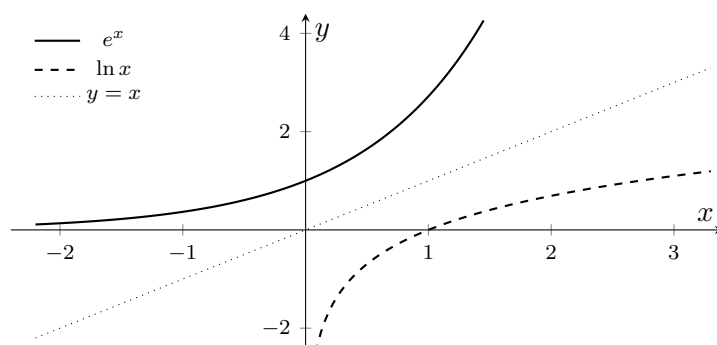
El mismo valor con las cuatro cifras intactas, y sin cambiar de precisión.

Lo mismo ocurre con la fórmula de la ecuación de segundo grado cuando $b^2 \gg 4ac$: una de las dos raíces se calcula restando cantidades casi iguales. Se salva calculando la raíz «buena» con la fórmula y la otra como $x_1 x_2 = c/a$.

La moraleja del tema: dos expresiones algebraicamente idénticas pueden ser numéricamente muy distintas, y elegir la forma de escribirlas es parte del cálculo.

1.3 Funciones elementales

Familia	Expresión	Dominio
Polinómicas	$a_n x^n + \dots + a_0$	$\mathbb{R}$
Racionales	cociente de polinomios	donde el denominador no se anula
Exponencial	e^x	$\mathbb{R}$, imagen $(0, \infty)$
Logarítmica	$\ln x$	$(0, \infty)$
Trigonómicas	$\sen x, \cos x, \operatorname{tg} x$	$\mathbb{R}$, salvo la tangente
Hiperbólicas	$\sinh x, \cosh x$	$\mathbb{R}$



La exponencial y el logaritmo son inversas, y por eso sus gráficas son simétricas respecto de $y = x$. Las propiedades que se usan sin parar:

$$e^{a+b} = e^a e^b, \quad \ln(ab) = \ln a + \ln b, \quad \ln(a^b) = b \ln a$$

La tercera es la que convierte productos en sumas, y la que hace del logaritmo la herramienta para tratar con crecimientos multiplicativos.

1.3.1 Composición e inversa

Concepto	Definición
Composición	$(f \circ g)(x) = f(g(x))$
Inyectiva	$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$
Sobreyectiva	su imagen es todo el conjunto de llegada
Inversa	existe si es biyectiva; $f^{-1}(f(x)) = x$

Para que una función tenga inversa hay que restringir el dominio cuando no es inyectiva. Es lo que ocurre con $\sin x$, cuya inversa se define sobre $[-\pi/2, \pi/2]$, y con x^2 , cuya raíz se define sobre $[0, \infty)$.

1.4 Ejercicios

Ejercicio 1.4.1. Calcular $\sqrt{10001} - \sqrt{10000}$ con seis cifras significativas, de las dos formas, y comparar.

Solución 1.4.1. Directamente: $100,005 - 100,000 = 0,005000$, con una cifra significativa útil. Racionalizando,

$$\frac{1}{\sqrt{10001} + \sqrt{10000}} = \frac{1}{200,005} = 0,00499988$$

con las seis cifras. La resta ha destruido cinco cifras que la segunda forma conserva, y las dos expresiones son la misma en el papel.

Ejercicio 1.4.2. Probar que $\sup(0, 1) = 1$ y que el conjunto no tiene máximo.

Solución 1.4.2. El 1 es cota superior porque todo $x \in (0, 1)$ cumple $x < 1$. Y es la menor: si $M < 1$ fuese cota superior, el punto $(M + 1)/2$ pertenece a $(0, 1)$ y es mayor que M , contradicción. No hay máximo porque el 1 no pertenece al conjunto, y cualquier $x \in (0, 1)$ es superado por $(x + 1)/2$, que también está.

Ejercicio 1.4.3. Una magnitud vale $x = 2,45$ con error absoluto 0,01. ¿Cuál es el error absoluto aproximado de x^3 ?

Solución 1.4.3. Con $f(x) = x^3$ se tiene $f'(x) = 3x^2 = 18,0$, así que $E_a(f) \approx 18,0 \times 0,01 = 0,18$. El error relativo pasa del 0,41 % al 1,2 %: elevar al cubo lo triplica, que es lo que dice la regla del error relativo del producto aplicada tres veces.

El tratamiento de los números reales y de las funciones elementales está en Rogawski, 2012 y Alaminos et al., 2019, y el de los errores y la aritmética finita en Burden y Faires, 2004.

Sucesiones y series

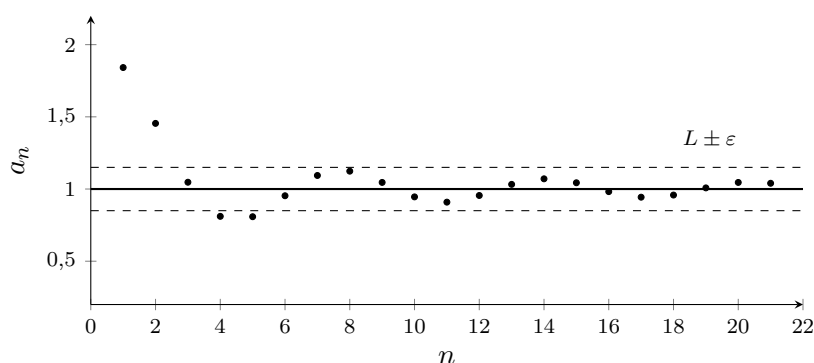
Tema 2 del programa. Convergencia de sucesiones, cálculo de límites, indeterminaciones y criterios de parada; y después series de términos positivos y alternadas con sus criterios de convergencia.

2.1 Sucesiones

Una sucesión es una aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$, y se escribe $\{a_n\}$.

Definición 2.1 (Límite de una sucesión). $\{a_n\}$ converge a L si para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que $|a_n - L| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Se escribe $\lim a_n = L$.

La definición dice exactamente esto: **por muy estrecha que se pida la banda alrededor de L , la sucesión acaba metiéndose dentro y ya no sale.** El N depende de ε , y esa dependencia es lo que se calcula al demostrar un límite.



2.1.1 Monotonía y acotación

Propiedad	Definición
Creciente	$a_{n+1} \geq a_n$ para todo n
Decreciente	$a_{n+1} \leq a_n$
Acotada superiormente	existe M con $a_n \leq M$
Acotada	acotada por arriba y por abajo

Teorema 2.1 (Convergencia monótona). Toda sucesión monótona y acotada converge. Si es creciente, su límite es el supremo del conjunto de sus términos; si es decreciente, el ínfimo.

Demostración 2.1 . Sea $\{a_n\}$ creciente y acotada superiormente. Por el axioma del supremo

existe $L = \sup\{a_n\}$. Dado $\varepsilon > 0$, $L - \varepsilon$ no es cota superior, así que hay un N con $a_N > L - \varepsilon$. Por ser creciente, $a_n \geq a_N$ para todo $n \geq N$, y por ser L cota superior, $a_n \leq L$. Luego $L - \varepsilon < a_n \leq L$ y por tanto $|a_n - L| < \varepsilon$.

Este teorema es el más útil del tema porque **prueba que hay límite sin calcularlo**, y esa es justo la situación de las sucesiones definidas por recurrencia.

Dos resultados que se usan como herramientas:

Proposición 2.1 (Toda sucesión convergente está acotada). Si $\{a_n\}$ converge, existe M con $|a_n| \leq M$ para todo n .

Proposición 2.2 (Regla del sándwich). Si $a_n \leq b_n \leq c_n$ para n grande y $\lim a_n = \lim c_n = L$, entonces $\lim b_n = L$.

El recíproco de la primera es falso: $\{(-1)^n\}$ está acotada y no converge. Y la regla del sándwich es la que resuelve los límites con senos y cosenos, acotando entre -1 y 1 .

2.1.2 Cálculo de límites e indeterminaciones

Las siete formas indeterminadas:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0$$

Indeterminada significa que **la forma no basta para decidir**: hay ejemplos con cualquier resultado. Las técnicas para resolverlas:

Situación	Técnica
Cociente de polinomios	dividir por la potencia mayor
Con raíces, $\infty - \infty$	multiplicar y dividir por el conjugado
1^∞	el número e
Cocientes con factoriales o potencias	criterio del cociente, o la escala de infinitos
Cualquier $0/0$ o ∞/∞	L'Hôpital, cuando el tema 3 lo permita

La escala de infinitos, que resuelve la mayoría sin cálculo:

$$\ln n \ll n^\alpha \ll a^n \ll n! \ll n^n \quad (\alpha > 0, a > 1)$$

Cada término crece infinitamente más deprisa que el anterior, así que el cociente de uno entre otro tiende a cero o a infinito según el orden.

Para 1^∞ , el resultado clave:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e \quad \text{si } a_n \rightarrow \infty$$

y de ahí la fórmula que se aplica directamente: si $a_n \rightarrow 1$ y $b_n \rightarrow \infty$,

$$\lim a_n^{b_n} = e^{\lim b_n (a_n - 1)}$$

Ejemplo 2.1 .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+1} \right)^{2n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} 2n \left(\frac{n+3}{n+1} - 1 \right)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{n+1}} = e^4$$

2.1.3 Sucesiones recurrentes y criterios de parada

Una sucesión definida por $a_{n+1} = f(a_n)$ se estudia en dos pasos: probar que converge —normalmente con monotonía y acotación, por inducción— y después calcular el límite imponiendo $L = f(L)$.

El orden importa. Imponer $L = f(L)$ sin haber probado la convergencia da un candidato que puede no existir: la sucesión $a_{n+1} = 2a_n$ con $a_1 = 1$ daría $L = 2L$, es decir $L = 0$, y en realidad diverge.

En cálculo numérico esas sucesiones son los métodos iterativos, y hay que decidir cuándo parar. Los criterios habituales:

Criterio	Condición	Cuidado
Error absoluto	$ a_{n+1} - a_n < \varepsilon$	engaña si la sucesión avanza despacio
Error relativo	$ a_{n+1} - a_n / a_{n+1} < \varepsilon$	falla si el límite es casi cero
Residuo	$ f(a_n) < \varepsilon$	pequeño no implica cerca de la raíz
Número de iteraciones	$n > N_{m\acute{a}x}$	imprescindible como red de seguridad

Nota 2.1 . El último criterio no es opcional. Sin un tope de iteraciones, un método que no converge deja el programa dando vueltas para siempre, y los tres primeros criterios no lo detectan: se limitan a no cumplirse nunca.

2.2 Series

Una serie es la sucesión de sumas parciales de otra:

$$S_N = \sum_{n=1}^N a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$$

Proposición 2.3 (Condición necesaria). Si $\sum a_n$ converge, entonces $a_n \rightarrow 0$.

Es necesaria y no suficiente, y confundirlo es el error más repetido del tema. La serie armónica $\sum 1/n$ tiene término general que tiende a cero y diverge. Lo que sí sirve es el contrarrecíproco: si $a_n \not\rightarrow 0$, la serie diverge, y eso se comprueba en un segundo.

2.2.1 Series de referencia

Serie	Converge si	Suma
Geométrica $\sum r^n$	$ r < 1$	$\frac{1}{1-r}$ desde $n = 0$

Serie	Converge si	Suma
Armónica generalizada $\sum \frac{1}{n^p}$	$p > 1$	no elemental
Telescópica $\sum (b_n - b_{n+1})$	si $\{b_n\}$ converge	$b_1 - \lim b_n$

Las dos primeras son el patrón con el que se comparan todas las demás.

2.2.2 Criterios para términos positivos

Criterio	Enunciado	Converge si
Comparación	$0 \leq a_n \leq b_n$	$\sum b_n$ converge
Comparación por paso al límite	$\lim a_n/b_n = L \in (0, \infty)$	las dos hacen lo mismo
Cociente (D'Alembert)	$\lim a_{n+1}/a_n = L$	$L < 1$
Raíz (Cauchy)	$\lim \sqrt[n]{a_n} = L$	$L < 1$
Integral	f decreciente positiva con $f(n) = a_n$	$\int_1^\infty f$ converge

Con $L = 1$ los criterios del cociente y de la raíz **no deciden nada**, y hay que ir a otro. Es justo lo que pasa con $\sum 1/n$ y con $\sum 1/n^2$, que dan $L = 1$ las dos y se comportan al revés.

Cuál usar, en la práctica:

Si el término general lleva	Criterio
factoriales o productos	cociente
potencias n -ésimas	raíz
cocientes de polinomios	comparación con $1/n^p$
una función integrable sencilla	integral

2.2.3 Series alternadas

Teorema 2.2 (Criterio de Leibniz). Si $\{a_n\}$ es decreciente, positiva y $a_n \rightarrow 0$, entonces $\sum (-1)^{n+1} a_n$ converge. Además, el error al truncar en el término N está acotado por el primer término despreciado:

$$|S - S_N| \leq a_{N+1}$$

La cota del error es lo más útil del criterio, porque **dice cuántos términos hacen falta para una precisión dada** sin conocer la suma.

2.2.4 Convergencia absoluta y condicional

Tipo	Definición
Absolutamente convergente	$\sum a_n $ converge
Condicionalmente convergente	$\sum a_n$ converge pero $\sum a_n $ no

La convergencia absoluta implica la convergencia, y no al revés: $\sum (-1)^{n+1}/n$ converge a $\ln 2$ y $\sum 1/n$ diverge.

Nota 2.2 . La diferencia no es académica. En una serie **absolutamente** convergente se puede reordenar los términos sin que cambie la suma; en una condicionalmente convergente, reordenar puede dar cualquier valor. Es el teorema de Riemann, y explica por qué sumar una serie en distinto orden —cosa que un programa paralelo hace sin avisar— no siempre es inocuo.

2.3 Ejercicios

Ejercicio 2.3.1. Estudiar la convergencia de $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, y calcular su límite si existe.

Solución 2.3.1. Por inducción, $a_n < 2$ para todo n : cierto para a_1 , y si $a_n < 2$ entonces $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{4} = 2$. Y es creciente, porque $a_{n+1} > a_n \iff 2 + a_n > a_n^2 \iff (a_n - 2)(a_n + 1) < 0$, cierto para $0 < a_n < 2$. Monótona y acotada, luego converge. Imponiendo $L = \sqrt{2 + L}$ sale $L^2 - L - 2 = 0$, con raíces 2 y -1 ; como todos los términos son positivos, $L = 2$.

Ejercicio 2.3.2. Determinar si $\sum \frac{n!}{n^n}$ converge.

Solución 2.3.2. Hay factoriales, así que criterio del cociente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e}$$

Como $1/e < 1$, la serie converge. Es coherente con la escala de infinitos: $n! \ll n^n$.

Ejercicio 2.3.3. ¿Cuántos términos de $\sum (-1)^{n+1}/n^2$ hacen falta para aproximar la suma con error menor que 10^{-3} ?

Solución 2.3.3. Cumple Leibniz, así que el error está acotado por el primer término despreciado: $1/(N+1)^2 < 10^{-3}$, de donde $(N+1)^2 > 1000$ y $N+1 > 31,6$, es decir $N = 31$ términos. Nótese que la serie es además absolutamente convergente, porque $\sum 1/n^2$ converge.

El tratamiento de sucesiones y series está desarrollado en Rogawski, 2012, Stewart, 2001 y Alaminos et al., 2019, y los criterios de parada de los métodos iterativos en Burden y Faires, 2004.

Continuidad y derivabilidad

Tema 3 del programa. Los teoremas de Bolzano y Weierstrass, el de Rolle y sus consecuencias sobre crecimiento y extremos, la representación de funciones, y los métodos numéricos de bisección y Newton-Raphson.

3.1 Continuidad

Definición 3.1 (Continuidad en un punto). f es continua en a si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta$ implica $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Equivalentemente, si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

La segunda formulación exige tres cosas a la vez, y examinarlas por separado es lo que clasifica las discontinuidades:

Tipo	Qué falla
Evitable	el límite existe pero no coincide con $f(a)$, o $f(a)$ no está definido
De salto	los límites laterales existen y son distintos
Esencial	algún límite lateral no existe o es infinito

Las funciones elementales son continuas en su dominio, y la suma, el producto, el cociente —donde no se anule el denominador— y la composición de continuas son continuas. Con eso, la continuidad rara vez hay que comprobarla: se comprueba solo en los puntos sospechosos, que son los de definición a trozos y los que anulan denominadores.

3.1.1 Los dos teoremas grandes

Teorema 3.1 (Bolzano). Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a)f(b) < 0$, existe $c \in (a, b)$ con $f(c) = 0$.

Teorema 3.2 (Weierstrass). Si f es continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, entonces f está acotada y alcanza su máximo y su mínimo absolutos en ese intervalo.

Las hipótesis no sobran, y comprobarlo es la mejor forma de entenderlos:

Hipótesis que se quita	Contraejemplo
Continuidad, en Bolzano	$f(x) = 1/x$ en $[-1, 1]$: cambia de signo y no se anula
Intervalo cerrado, en Weierstrass	$f(x) = x$ en $(0, 1)$: no alcanza extremos
Intervalo acotado, en Weierstrass	$f(x) = x$ en $[0, \infty)$: no está acotada

Hipótesis que se quita

Contraejemplo

Bolzano es el fundamento del método de bisección y de toda la localización de raíces: garantiza que hay solución, aunque no diga dónde ni cuántas. Weierstrass es lo que garantiza que un problema de optimización sobre un cerrado acotado tenga solución, y por eso se enuncia siempre antes de buscar extremos.

3.2 Derivabilidad

Definición 3.2 (Derivada).

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

cuando el límite existe y es finito.

Proposición 3.1 . Si f es derivable en a , entonces es continua en a . El recíproco es falso.

El contraejemplo del recíproco es $f(x) = |x|$ en el cero: continua, con derivadas laterales -1 y 1 , que no coinciden. Geométricamente, un pico.

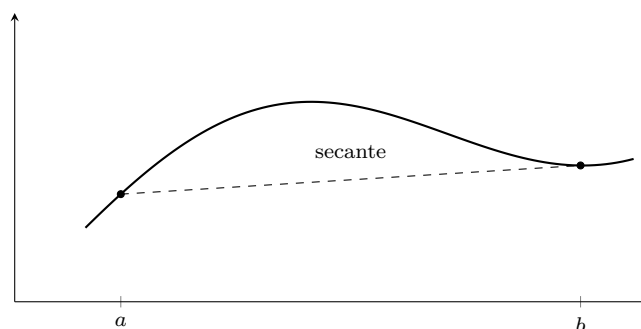
Regla	Expresión
Producto	$(fg)' = f'g + fg'$
Cociente	$(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$
Cadena	$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) g'(x)$
Inversa	$(f^{-1})'(y) = 1/f'(x)$ con $y = f(x)$

3.2.1 Teoremas del valor medio

Teorema 3.3 (Rolle). Si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$, existe $c \in (a, b)$ con $f'(c) = 0$.

Teorema 3.4 (Valor medio de Lagrange). Con las mismas hipótesis sobre continuidad y derivabilidad, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



El teorema del valor medio dice que **la pendiente media se alcanza en algún punto**, y de él salen casi todas las consecuencias prácticas:

Consecuencia	Enunciado
Crecimiento	$f' > 0$ en un intervalo $\Rightarrow f$ es creciente ahí
Decrecimiento	$f' < 0 \Rightarrow$ decreciente
Funciones constantes	$f' \equiv 0$ en un intervalo $\Rightarrow f$ constante
Unicidad de primitivas	dos funciones con la misma derivada difieren en una constante

La tercera y la cuarta son la base del tema 4: sin ellas, la regla de Barrow no tendría sentido.

3.2.2 L'Hôpital

Teorema 3.5 (Regla de L'Hôpital). Si $\lim f = \lim g = 0$ (o las dos tienden a ∞), g' no se anula cerca de a y existe $\lim f'/g'$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Nota 3.1 . Tres cautelas. Solo se aplica a $0/0$ y ∞/∞ : las otras cinco indeterminaciones hay que reescribirlas primero. Que el límite de los cocientes de derivadas *no* exista no significa que el original no exista. Y derivar repetidamente puede complicar la expresión en vez de simplificarla, en cuyo caso la herramienta correcta es el desarrollo de Taylor del tema 5.

3.3 Extremos y representación de funciones

Concepto	Definición
Punto crítico	$f'(x) = 0$ o f' no existe
Máximo local	$f(x) \geq f(t)$ para t en un entorno
Punto de inflexión	cambia la concavidad
Convexa	$f'' > 0$; la curva queda por encima de sus tangentes
Cóncava	$f'' < 0$

Los criterios para clasificar un punto crítico c :

Criterio	Cómo
De la primera derivada	mira el signo de f' a los dos lados
De la segunda derivada	$f''(c) > 0$ mínimo, $f''(c) < 0$ máximo, $f''(c) = 0$ no decide

Nota 3.2 . Los extremos de una función continua en $[a, b]$ pueden estar en tres sitios: puntos críticos, puntos donde f' no existe, y **los extremos del intervalo**. Olvidar los del intervalo es el error más frecuente al optimizar, y Weierstrass garantiza que el máximo existe en alguno de esos tres sitios.

El guion completo para representar una función:

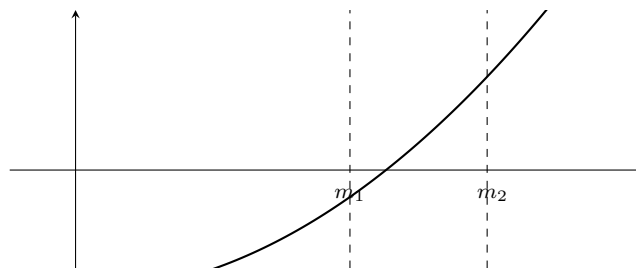
1. Dominio, cortes con los ejes y signo.
2. Simetrías y periodicidad.
3. Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
4. Primera derivada: crecimiento y extremos.
5. Segunda derivada: concavidad e inflexiones.
6. Tabla de valores y dibujo.

3.4 Métodos numéricos de resolución de ecuaciones

La mayoría de las ecuaciones no tienen solución en forma cerrada, así que se aproxima. Los dos métodos del programa.

3.4.1 Bisección

Se apoya en Bolzano: si $f(a)f(b) < 0$, hay raíz en (a, b) . Se parte el intervalo por la mitad y se conserva el subintervalo donde el signo sigue cambiando.



Tras n pasos, la raíz está localizada en un intervalo de longitud $(b - a)/2^n$, así que el número de iteraciones para una tolerancia ε se conoce **de antemano**:

$$n \geq \log_2 \frac{b - a}{\varepsilon}$$

Ventaja	Inconveniente
Converge siempre si hay cambio de signo	convergencia lenta, lineal
El número de pasos se sabe por adelantado	no aprovecha nada de la forma de f
No necesita la derivada	no detecta raíces dobles, que no cambian el signo

3.4.2 Newton-Raphson

Aproxima f por su tangente y toma como siguiente candidato el corte de la tangente con el eje:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Ventaja	Inconveniente
Convergencia cuadrática: dobla las cifras correctas en cada paso	puede no converger si el inicio está lejos
Pocas iteraciones cuando funciona	necesita f' , y que no se anule
Se generaliza a sistemas	oscila o diverge en configuraciones desfavorables

Ejemplo 3.1 . Para $f(x) = x^2 - 2$ con $x_0 = 1$, la iteración es $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right)$:

n	x_n	cifras correctas
0	1,000000000	0
1	1,500000000	0
2	1,416666667	2
3	1,414215686	5
4	1,414213562	11

La columna de la derecha es la convergencia cuadrática: 0, 2, 5, 11. Bisección necesitaría unas 37 iteraciones para lo mismo.

Cuándo falla Newton, que es tan importante como cuándo funciona:

- Si $f'(x_n)$ es próxima a cero, el paso se dispara y el método se va lejos.
- Con un punto inicial mal elegido puede entrar en un ciclo y oscilar sin avanzar.
- En una raíz múltiple la convergencia deja de ser cuadrática y pasa a lineal.

De ahí la estrategia habitual en la práctica: **empezar con bisección** para acotar la raíz y **terminar con Newton** para afinar. Se combina la garantía de la primera con la velocidad del segundo.

3.5 Ejercicios

Ejercicio 3.5.1. Probar que $x^3 + x - 1 = 0$ tiene una única raíz real y localizarla en un intervalo de longitud 0,25.

Solución 3.5.1. f es continua, $f(0) = -1$ y $f(1) = 1$, así que por Bolzano hay raíz en $(0, 1)$. Es única porque $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ para todo x , luego f es estrictamente creciente y no puede cortar el eje dos veces. Bisectando: $f(0,5) = -0,375$, así que la raíz está en $(0,5, 1)$; $f(0,75) = 0,172$, luego está en $(0,5, 0,75)$, de longitud 0,25.

Ejercicio 3.5.2. ¿Cuántas iteraciones de bisección hacen falta para aproximar una raíz en $[1, 2]$ con error menor que 10^{-6} ?

Solución 3.5.2. $1/2^n < 10^{-6}$, es decir $2^n > 10^6$, de donde $n > 19,93$: veinte iteraciones. La cifra se conoce antes de empezar y no depende de la función, solo de la longitud del intervalo, que es la ventaja del método.

Ejercicio 3.5.3. Aplicar Newton a $f(x) = x^3 - 2x + 2$ con $x_0 = 0$. ¿Qué ocurre?

Solución 3.5.3. $f'(x) = 3x^2 - 2$, así que $x_1 = 0 - 2/(-2) = 1$, y $x_2 = 1 - 1/1 = 0$. El método oscila

entre 0 y 1 indefinidamente sin acercarse a la raíz, que está cerca de $-1,77$. Es el caso del ciclo: converger no está garantizado, y por eso un criterio de parada por número máximo de iteraciones es obligatorio.

Los teoremas de continuidad y derivabilidad están desarrollados en Rogawski, 2012, Stewart, 2001 y Alaminos et al., 2019, y los métodos de bisección y Newton en Burden y Faires, 2004.

Integrabilidad

Tema 4 del programa. La integral de funciones continuas, el teorema fundamental y la regla de Barrow, el cálculo de primitivas, las integrales impropias, las aplicaciones geométricas y la aproximación numérica.

4.1 La integral definida

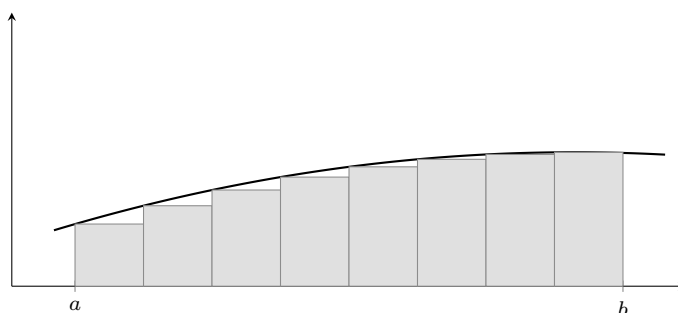
La construcción parte de aproximar el área bajo la curva con rectángulos. Dada una partición $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$:

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i, \quad S(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

con m_i y M_i el ínfimo y el supremo de f en cada subintervalo.

Definición 4.1 (Integral de Riemann). f es integrable en $[a, b]$ si el supremo de las sumas inferiores coincide con el ínfimo de las superiores. Ese valor común es $\int_a^b f$.

Teorema 4.1 . Toda función continua en $[a, b]$ es integrable. También lo es toda función acotada con un número finito de discontinuidades.



Propiedades que se usan constantemente:

Propiedad	Expresión
Linealidad	$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$
Aditividad	$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$
Monotonía	$f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$
Acotación	$ \int_a^b f \leq \int_a^b f $
Orientación	$\int_a^b = -\int_b^a$

4.2 El teorema fundamental y la regla de Barrow

Teorema 4.2 (Fundamental del cálculo integral). Si f es continua en $[a, b]$, la función

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

es derivable en $[a, b]$ y $F'(x) = f(x)$.

Teorema 4.3 (Regla de Barrow). Si f es continua en $[a, b]$ y G es cualquier primitiva suya, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$$

El primero dice que **derivar deshace integrar**, y el segundo convierte el cálculo de un área —definido como un límite de sumas— en una resta de dos valores. Es la conexión entre las dos mitades del cálculo, y la razón de que integrar sea practicable.

Nota 4.1 . Que Barrow valga para *cualquier* primitiva es consecuencia directa del teorema del valor medio: dos primitivas de la misma función difieren en una constante, y la constante se cancela al restar. Por eso la constante de integración no se arrastra en una integral definida.

Combinado con la regla de la cadena, el teorema fundamental da la derivada de una integral con límites variables:

$$\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt = f(v(x)) v'(x) - f(u(x)) u'(x)$$

4.3 Cálculo de primitivas

Método	Cuándo	Fórmula
Inmediatas	la tabla	—
Sustitución	aparece una función y su derivada	$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$
Por partes	producto de tipos distintos	$\int u dv = uv - \int v du$
Fracciones simples	cociente de polinomios	descomponer y sumar
Sustituciones trigonométricas	radicales cuadráticos	$x = a \sin t$ y análogas

Para elegir u en la integración por partes sirve la regla nemotécnica **ALPES**: arcos, logaritmos, polinomios, exponenciales, senos y cosenos, en ese orden de preferencia. No es un teorema; es que derivar un arco o un logaritmo simplifica y derivar una exponencial no.

4.3.1 Fracciones simples

Para $\int P(x)/Q(x) dx$ con $\deg P < \deg Q$, se factoriza Q y se descompone:

Factor de Q	Término que aporta
$(x - a)$ simple	$\frac{A}{x - a}$
$(x - a)^k$	$\frac{A_1}{x - a} + \cdots + \frac{A_k}{(x - a)^k}$
$(x^2 + bx + c)$ irreducible	$\frac{Mx + N}{x^2 + bx + c}$

Si $\deg P \geq \deg Q$ hay que **dividir primero**: el cociente se integra como polinomio y el resto queda en las condiciones anteriores. Olvidar la división es el fallo más común del método.

Ejemplo 4.1 .

$$\int \frac{3x + 5}{x^2 - x - 2} dx$$

El denominador factoriza como $(x - 2)(x + 1)$, así que se busca $\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$ con $3x + 5 = A(x + 1) + B(x - 2)$. Dando a x los valores 2 y -1 salen $A = 11/3$ y $B = -2/3$, y por tanto

$$\frac{11}{3} \ln|x - 2| - \frac{2}{3} \ln|x + 1| + C$$

Nota 4.2 . Hay funciones continuas cuya primitiva **no se puede escribir con funciones elementales**: e^{-x^2} , $\sin(x)/x$ y $1/\ln x$ son los ejemplos clásicos. No es que no se sepa calcularlas; está demostrado que no existe tal expresión. De ahí que la aproximación numérica no sea un recurso de emergencia sino la única vía en muchos casos.

4.4 Integrales impropias

Cuando el intervalo es infinito o la función no está acotada, la integral se define como un límite.

Tipo	Definición
Primera especie	$\int_a^\infty f = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f$
Segunda especie	$\int_a^b f = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f$ si f no está acotada en b

Converge si el límite existe y es finito; en otro caso, diverge.

Las dos referencias con las que se compara todo:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} \text{ converge } \iff p > 1, \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^p} \text{ converge } \iff p < 1$$

Las condiciones son opuestas, y la razón es clara al mirarlas: en el infinito el problema es que la cola no decaiga bastante, y en el cero que la función crezca demasiado.

Los criterios son los de las series, con la misma forma: comparación directa y comparación por paso al límite. Y la relación entre las dos teorías es el **criterio integral** del tema 2, que las une.

4.5 Aplicaciones de la integral

Magnitud	Fórmula
Área bajo una curva	$\int_a^b f$
Área entre dos curvas	$\int_a^b (f - g)$, con $f \geq g$
Longitud de arco	$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$
Volumen por discos	$\pi \int_a^b f(x)^2 dx$
Volumen por capas	$2\pi \int_a^b x f(x) dx$
Superficie de revolución	$2\pi \int_a^b f \sqrt{1 + f'^2} dx$
Valor medio de f	$\frac{1}{b-a} \int_a^b f$

Para el área entre curvas hay una precaución que cuesta puntos: si las curvas se cortan dentro del intervalo, **hay que partir la integral en los cortes** y tomar en cada trozo la diferencia en el orden correcto. Integrar $f - g$ de un tirón da la diferencia de áreas con signo, no el área.

Ejemplo 4.2 . El sólido de revolución de $f(x) = 1/x$ sobre $[1, \infty)$ tiene volumen

$$\pi \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \pi$$

finito, y superficie

$$2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx \geq 2\pi \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \infty$$

infinita. Se puede llenar de pintura y no se puede pintar por fuera: es la trompeta de Torricelli, y el ejemplo estándar de que la intuición geométrica falla con lo infinito.

4.6 Aproximación numérica

Cuando la primitiva no es elemental o solo se conocen valores tabulados, se aproxima. Dividiendo $[a, b]$ en n subintervalos de anchura $h = (b - a)/n$:

Método	Fórmula	Error
Rectángulos	$h \sum f(x_i)$	$O(h)$
Punto medio	$h \sum f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$	$O(h^2)$
Trapezios	$\frac{h}{2} \left[f_0 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n \right]$	$O(h^2)$
Simpson	$\frac{h}{3} \left[f_0 + 4 \sum_{\text{impares}} + 2 \sum_{\text{pares}} + f_n \right]$	$O(h^4)$

Las cotas del error, que es lo que permite elegir n de antemano:

$$E_{trap} \leq \frac{(b-a)h^2}{12} \max |f''|, \quad E_{Simpson} \leq \frac{(b-a)h^4}{180} \max |f^{(4)}|$$

Simpson exige n par, porque agrupa los subintervalos de dos en dos para ajustar una parábola a cada par. Y como una parábola integra exactamente los polinomios de grado hasta 3, Simpson es exacto para cúbicas pese a construirse con parábolas.

Ejemplo 4.3 . Con $n = 4$ sobre $[0, 1]$ y $f(x) = e^{-x^2}$, cuya primitiva no es elemental:

Método	Valor	Error
Trapecios	0,742984	4×10^{-3}
Simpson	0,746855	3×10^{-6}
Valor exacto	0,746824	—

Con las mismas cinco evaluaciones de la función, Simpson acierta mil veces mejor. Es la diferencia entre $O(h^2)$ y $O(h^4)$.

4.7 Ejercicios

Ejercicio 4.7.1. Calcular $\int_0^1 x e^x dx$.

Solución 4.7.1. Por partes con $u = x$ y $dv = e^x dx$, según ALPES: $du = dx$ y $v = e^x$. Entonces

$$\int_0^1 x e^x dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e - 1) = 1$$

Tomar $u = e^x$ habría dado una integral peor que la de partida, que es la comprobación de que la regla de elección sirve para algo.

Ejercicio 4.7.2. Estudiar la convergencia de $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x}}$.

Solución 4.7.2. Es $\int_1^\infty x^{-3/2} dx$, con $p = 3/2 > 1$: converge. Su valor es $[-2x^{-1/2}]_1^\infty = 2$. Nótese que $\int_0^1 x^{-3/2} dx$, con el mismo integrando, diverge, porque cerca del cero la condición es $p < 1$.

Ejercicio 4.7.3. ¿Cuántos subintervalos hace falta para aproximar $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ con error menor que 10^{-4} por trapecios, sabiendo que $|f''| \leq 2$ en $[0, 1]$?

Solución 4.7.3. $E \leq \frac{1 \cdot h^2}{12} \cdot 2 = \frac{h^2}{6} < 10^{-4}$, de donde $h < 0,0245$ y $n > 40,8$: 41 subintervalos. Con Simpson y $|f^{(4)}| \leq 12$ saldría $h^4 < 1,5 \times 10^{-3}$, es decir $n \geq 6$. Casi siete veces menos evaluaciones para la misma precisión.

El desarrollo de la integral y sus aplicaciones está en Rogawski, 2012, Stewart, 2001 y Alaminos et al., 2019, y los métodos de cuadratura numérica en Burden y Faires, 2004.

Interpolación numérica

Tema 5 del programa. El polinomio de Taylor, y los métodos de Lagrange y de Newton para construir el polinomio que pasa por un conjunto de puntos.

5.1 El problema

Dados $n + 1$ puntos $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ con abscisas distintas, se busca una función sencilla que pase por todos. Dos situaciones distintas lo motivan:

Situación	Para qué sirve interpolar
Solo se conocen valores tabulados	estimar entre ellos
La función se conoce y es cara de evaluar	sustituirla por algo barato

Y una consecuencia derivada: con el polinomio en la mano, derivar e integrar la función aproximada es inmediato. Ahí es donde nacen las fórmulas de cuadratura del tema 4 —los trapecios son la interpolación lineal, y Simpson la cuadrática— y las de derivación numérica.

Teorema 5.1 (Existencia y unicidad). Dados $n + 1$ puntos con abscisas distintas, existe un único polinomio de grado menor o igual que n que pasa por todos ellos.

La unicidad importa más de lo que parece: **Lagrange y Newton dan el mismo polinomio**, escrito de dos maneras. No son dos aproximaciones distintas entre las que elegir, sino dos formas de calcular lo mismo, con costes distintos.

5.2 El polinomio de Taylor

Antes de interpolar entre varios puntos, el caso de un solo punto con muchas derivadas.

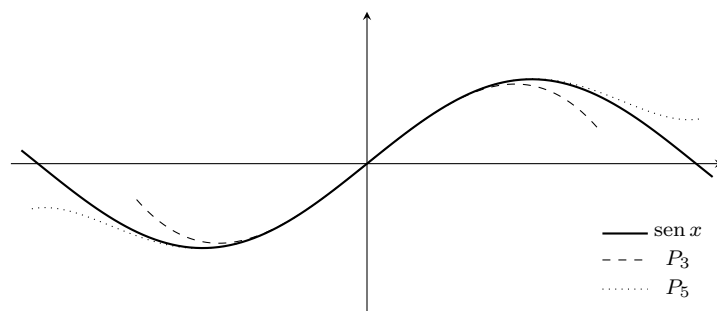
Definición 5.1 (Polinomio de Taylor).

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

Coincide con f en a hasta la derivada n -ésima.

Teorema 5.2 (Resto de Lagrange). Si f es $n + 1$ veces derivable, para cada x existe ξ entre a y x con

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}$$



La gráfica muestra lo característico de Taylor: **la aproximación es muy buena cerca del punto y se degrada al alejarse**, y añadir grado amplía la zona buena.

Los desarrollos en el origen que conviene tener presentes:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots, \quad \text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots, \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

Sirven para tres cosas: aproximar valores, calcular límites indeterminados sin L'Hôpital, y estimar el error cometido al truncar.

Ejemplo 5.1 .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)\right) - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$$

L'Hôpital daría lo mismo tras derivar tres veces. Con Taylor sale de una línea, y esa es la razón de que sea la herramienta preferida cuando el orden del cero es alto.

5.3 Interpolación de Lagrange

Se construyen $n + 1$ polinomios base, cada uno valiendo 1 en su nodo y 0 en los demás:

$$\ell_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad P(x) = \sum_{i=0}^n y_i \ell_i(x)$$

Que $P(x_k) = y_k$ es inmediato: en x_k todos los ℓ_i se anulan salvo ℓ_k , que vale 1.

Ejemplo 5.2 . Con los puntos $(0, 1)$, $(1, 3)$ y $(2, 2)$:

$$\ell_0 = \frac{(x-1)(x-2)}{2}, \quad \ell_1 = \frac{x(x-2)}{-1}, \quad \ell_2 = \frac{x(x-1)}{2}$$

$$P(x) = 1 \cdot \ell_0 + 3 \cdot \ell_1 + 2 \cdot \ell_2 = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{2}x + 1$$

Comprobación: $P(0) = 1$, $P(1) = 3$, $P(2) = 2$.

Ventaja	Inconveniente
Fórmula explícita y fácil de demostrar	añadir un punto obliga a rehacerlo todo
Cómoda para deducir fórmulas teóricas	evaluar cuesta $O(n^2)$ por punto

El inconveniente en negrita es el que motiva el método siguiente.

5.4 Interpolación de Newton

Escribe el polinomio de forma que **cada punto nuevo añade un término y no toca los anteriores**:

$$P(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots$$

Los coeficientes son las **diferencias divididas**, definidas por recurrencia:

$$f[x_i] = y_i, \quad f[x_i, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

Se calculan en tabla triangular:

x_i	$f[x_i]$	$f[\cdot, \cdot]$	$f[\cdot, \cdot, \cdot]$
0	1		
		2	
1	3		$-3/2$
		-1	
2	2		

Los coeficientes son la **diagonal superior**: 1, 2 y $-3/2$, así que

$$P(x) = 1 + 2x - \frac{3}{2}x(x - 1)$$

que desarrollado es el mismo polinomio que dio Lagrange, como garantiza la unicidad.

Ventaja	Inconveniente
Añadir un punto es añadir un término	la tabla hay que mantenerla
Se evalúa por Horner en $O(n)$	ligeramente menos directo de enunciar
Los coeficientes tienen interpretación: aproximan derivadas	—

La última fila es la conexión con Taylor: cuando los nodos se juntan, $f[x_0, \dots, x_k] \rightarrow f^{(k)}(x_0)/k!$, y el polinomio de Newton se convierte en el de Taylor. **Son el mismo objeto en dos situaciones distintas**: Taylor usa un punto con muchas derivadas, Newton muchos puntos con un valor cada uno.

5.5 Error de interpolación

Teorema 5.3 (Error de interpolación). Si f es $n + 1$ veces derivable, para cada x existe ξ en el intervalo que contiene los nodos y x tal que

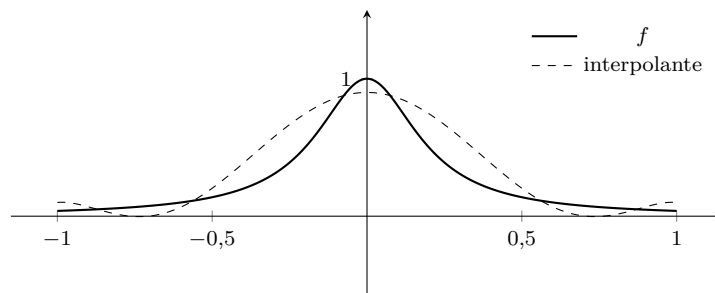
$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

La fórmula tiene la misma forma que el resto de Taylor, con el producto de los nodos en lugar de la potencia. Dos lecturas prácticas:

- **El error se anula en los nodos**, como debe ser, y crece entre ellos.
- El producto es mucho mayor **fuera** del intervalo de los nodos: interpolar es fiable, extrapolar no lo es.

5.5.1 El fenómeno de Runge

Aumentar el grado no siempre mejora. Con la función $f(x) = 1/(1 + 25x^2)$ en $[-1, 1]$ y nodos equiespaciados, el error **crece** con el grado, y lo hace en los extremos del intervalo.



Las dos salidas:

Solución	Idea
Nodos de Chebyshev	concentrarlos hacia los extremos, no equiespaciados
Splines	polinomios de grado bajo a trozos, enlazados con continuidad

Los splines cúbicos son lo que se usa en la práctica, y también lo que hay detrás de las curvas de cualquier programa de dibujo: grado tres, con derivadas primera y segunda continuas en los nodos.

Nota 5.1 . La moraleja del fenómeno de Runge es que **más grado no es más precisión**. Un polinomio de grado alto oscila, y su error se concentra donde menos se espera. La respuesta correcta casi siempre es bajar el grado y trocear.

5.6 Ejercicios

Ejercicio 5.6.1. Construir el polinomio de interpolación de $(1, 2)$, $(2, 3)$ y $(4, 1)$ por diferencias divididas.

Solución 5.6.1. $f[x_0] = 2$; $f[x_0, x_1] = (3 - 2)/(2 - 1) = 1$; $f[x_1, x_2] = (1 - 3)/(4 - 2) = -1$; y $f[x_0, x_1, x_2] = (-1 - 1)/(4 - 1) = -2/3$. Por tanto

$$P(x) = 2 + 1 \cdot (x - 1) - \frac{2}{3}(x - 1)(x - 2)$$

Comprobación en los tres nodos: $P(1) = 2$, $P(2) = 3$, $P(4) = 2 + 3 - \frac{2}{3} \cdot 6 = 1$.

Ejercicio 5.6.2. Acotar el error de aproximar $e^{0,1}$ por su polinomio de Taylor de grado 2 en el origen.

Solución 5.6.2. $P_2(x) = 1 + x + x^2/2$, así que $P_2(0,1) = 1,105$. El resto es $\frac{e^\xi}{6}(0,1)^3$ con $\xi \in (0, 0,1)$, y como $e^\xi < e^{0,1} < 1,11$, queda $E < 1,11 \times 10^{-3}/6 = 1,85 \times 10^{-4}$. El valor exacto es 1,10517, con error real $1,7 \times 10^{-4}$: la cota es ajustada.

Ejercicio 5.6.3. ¿Por qué añadir un punto obliga a rehacer el polinomio de Lagrange y no el de Newton?

Solución 5.6.3. Porque cada base ℓ_i de Lagrange se define con *todos* los nodos en su producto, así que un nodo nuevo cambia las $n + 1$ bases anteriores. En Newton los coeficientes ya calculados no dependen de los nodos posteriores: basta añadir una fila a la tabla de diferencias divididas y un término al polinomio.

El polinomio de Taylor está desarrollado en Rogawski, 2012 y Alaminos et al., 2019, y la interpolación y el análisis de su error en Burden y Faires, 2004.

Resolución de sistemas de ecuaciones

Tema 6 del programa. Cómo se resuelve numéricamente un sistema lineal, qué puede salir mal por culpa de la aritmética finita, y los métodos iterativos.

6.1 El problema

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

El sistema tiene solución única si y solo si A es invertible, es decir $\det A \neq 0$. Pero **calcular la inversa para resolver es la peor opción posible**: cuesta más operaciones, acumula más error y no aporta nada. La regla práctica es que si aparece $A^{-1}\mathbf{b}$ en un programa, casi siempre está mal escrito.

Y la regla de Cramer, que es exacta y elegante, necesita $n + 1$ determinantes: con el desarrollo por menores, $O(n!)$ operaciones. Con $n = 20$ eso son más operaciones que átomos manejables. **Cramer sirve para demostrar, no para calcular.**

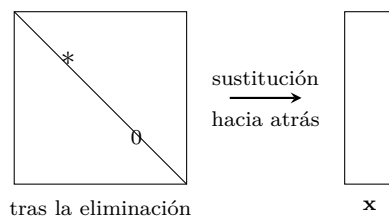
Método	Coste
Cramer con menores	$O((n + 1)!)$
Inversa y producto	$O(n^3)$, con peor error
Eliminación gaussiana	$O(n^3/3)$
Métodos iterativos	$O(n^2)$ por iteración

6.2 Eliminación gaussiana

Transformar el sistema en uno triangular equivalente y resolverlo hacia atrás.

Las tres operaciones elementales que no cambian la solución:

Operación	Notación
Intercambiar dos filas	$F_i \leftrightarrow F_j$
Multiplicar una fila por $\lambda \neq 0$	$F_i \rightarrow \lambda F_i$
Sumar a una fila un múltiplo de otra	$F_i \rightarrow F_i + \lambda F_j$



El algoritmo, en la etapa k : se anula la columna k por debajo de la diagonal restando a cada fila $i > k$ la fila k multiplicada por $m_{ik} = a_{ik}/a_{kk}$.

6.2.1 El pivoteo

El elemento a_{kk} es el **pivote**, y hay dos motivos para no usarlo tal cual:

- Si es cero, la división es imposible.
- Si es pequeño, los multiplicadores son enormes y el error de redondeo se amplifica.

Estrategia	Qué hace
Parcial	intercambia filas para que el pivote sea el mayor en valor absoluto de su columna
Escalado	lo mismo, relativo al mayor elemento de cada fila
Total	intercambia filas y columnas; el más estable y el más caro

Ejemplo 6.1 . Con tres cifras significativas, el sistema

$$\begin{cases} 0,0003x + 3,00y = 2,0001 \\ 1,00x + 1,00y = 1,00 \end{cases}$$

tiene solución exacta $x = 1/3$, $y = 2/3$.

Sin pivoteo, el multiplicador es $1/0,0003 = 3333$, la segunda ecuación queda $-10000y = -6667$ y sale $y = 0,667$, correcto, pero al sustituir hacia atrás $x = (2,0001 - 2,001)/0,0003 = -3,00$: un error del 1000 %.

Con pivoteo parcial se intercambian las filas primero, el multiplicador pasa a ser 0,0003 y salen $x = 0,333$ e $y = 0,667$. Mismo sistema, misma aritmética, mismo algoritmo: solo cambia el orden de las filas.

Ese ejemplo es todo el tema. El pivoteo no es un detalle de implementación: es lo que separa un resultado correcto de uno absurdo.

6.2.2 Factorización LU

La eliminación gaussiana, guardada. Se descompone $A = LU$ con L triangular inferior de unos en la diagonal y U triangular superior, y entonces:

$$Ax = b \iff Ly = b, Ux = y$$

Dos sistemas triangulares, cada uno $O(n^2)$. La ventaja aparece al resolver **varios sistemas con la misma matriz y distintos términos independientes**: la factorización se hace una vez, $O(n^3/3)$, y cada término nuevo cuesta $O(n^2)$.

Con pivoteo la descomposición es $PA = LU$, con P la matriz de permutación que registra los intercambios de fila.

Casos particulares que se aprovechan:

Si A es	Se usa	Coste
Simétrica definida positiva	Cholesky, $A = LL^T$	la mitad
Tridiagonal	algoritmo de Thomas	$O(n)$
Dispersa	métodos que preservan la dispersión	según el patrón

6.3 Condicionamiento

Un sistema puede ser sensible por su propia naturaleza, con independencia del método. La medida es el **número de condición**:

$$\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \geq 1$$

Y la cota que explica su nombre: si $\mathbf{b}$ tiene un error relativo ε , la solución puede tenerlo hasta $\kappa(A)\varepsilon$.

$\kappa(A)$	Interpretación
cercano a 1	bien condicionado
10^k	se pierden hasta k cifras significativas
enorme	mal condicionado: la solución es poco fiable

Ejemplo 6.2 . El sistema

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 1,0001y = 2,0001 \end{cases}$$

tiene solución $x = y = 1$. Cambiando el segundo término independiente a 2,0002, la solución pasa a $x = 0$, $y = 2$: una perturbación de 10^{-4} en los datos mueve la solución en una unidad. Geométricamente, las dos rectas son casi paralelas y su corte se desplaza muchísimo al moverlas un poco.

Nota 6.1 . Un determinante pequeño **no** indica mal condicionamiento. Multiplicar toda la matriz por 10^{-3} divide el determinante por 10^{-3n} y deja κ intacto, porque el sistema es el mismo. El indicador es κ , no $\det A$.

6.4 Métodos iterativos

Con matrices grandes y dispersas —las que salen de discretizar ecuaciones en derivadas parciales, con millones de incógnitas y pocos elementos no nulos por fila— la eliminación gaussiana rellena la matriz de ceros que dejan de serlo y agota la memoria. La alternativa es iterar.

Se parte de una aproximación $\mathbf{x}^{(0)}$ y se construye una sucesión. Descomponiendo $A = D + L + U$ en diagonal, triangular inferior y superior:

Método	Iteración
Jacobi	$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$
Gauss-Seidel	igual, pero usando los $x_j^{(k+1)}$ ya calculados
Relajación (SOR)	Gauss-Seidel con un factor ω de sobrerrelajación

La diferencia entre los dos primeros es sutil y decisiva: **Jacobi usa solo valores de la iteración anterior** y Gauss-Seidel aprovecha los recién calculados, así que converge más rápido. A cambio, Jacobi se paraleliza sin esfuerzo y Gauss-Seidel no.

Teorema 6.1 (Condición suficiente de convergencia). Si A es estrictamente diagonal dominante, es decir

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad \text{para toda fila } i$$

entonces Jacobi y Gauss-Seidel convergen desde cualquier punto inicial.

Es **suficiente y no necesaria**: hay matrices que no la cumplen y con las que los métodos convergen igual. La condición necesaria y suficiente es que el radio espectral de la matriz de iteración sea menor que 1.

	Directos	Iterativos
Resultado	exacto salvo redondeo	aproximado, con la precisión que se pida
Coste	$O(n^3)$ fijo	$O(n^2)$ por iteración
Memoria	rellena la matriz	conserva la dispersión
Cuándo	n moderado, matriz densa	n grande, matriz dispersa
Interrumpible	no	sí: se para cuando el residuo baste

La última fila es una ventaja práctica que se olvida: un método iterativo da una respuesta útil aunque se pare antes de tiempo, y un método directo no da nada hasta el final.

6.5 Ejercicios

Ejercicio 6.5.1. Resolver por eliminación gaussiana con pivoteo parcial:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 8 \\ -3x - y + 2z = -11 \\ -2x + y + 2z = -3 \end{cases}$$

Solución 6.5.1. El mayor elemento de la primera columna es -3 , así que se intercambian las dos primeras filas. Eliminando con multiplicadores $-2/3$ y $2/3$ queda un sistema triangular, y la

sustitución hacia atrás da $z = -1$, $y = 3$, $x = 2$. Comprobación en la tercera ecuación original: $-4 + 3 - 2 = -3$.

Ejercicio 6.5.2. ¿Por qué no se resuelve un sistema calculando A^{-1} y multiplicando?

Solución 6.5.2. Por dos razones. Calcular la inversa cuesta unas tres veces más operaciones que la eliminación gaussiana, porque equivale a resolver n sistemas. Y acumula más error de redondeo, ya que el producto $A^{-1}\mathbf{b}$ añade sus propios errores a los que ya lleva la inversa. La inversa solo se calcula cuando se necesita la matriz en sí, que es raro.

Ejercicio 6.5.3. Comprobar si el sistema converge con Jacobi:

$$\begin{cases} 4x + y = 5 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$$

Solución 6.5.3. Es estrictamente diagonal dominante: $|4| > |1|$ en la primera fila y $|3| > |1|$ en la segunda. Luego Jacobi converge desde cualquier punto inicial. Partiendo de $(0, 0)$: $(1, 25)$; $(1, 333)$, $(0, 917)$; $(0, 917)$, $(1, 021)$; $(1, 028)$, acercándose a la solución $(1, 1)$.

Los métodos directos e iterativos para sistemas lineales, el pivoteo y el condicionamiento están desarrollados en Burden y Faires, 2004.

Temario práctico

Las prácticas de ordenador con Maxima, que acompañan al desarrollo teórico. El objetivo no es aprender un programa: es **usarlo para ver lo que en el papel se demuestra**, y para hacer los cálculos que a mano no salen.

7.1 Maxima

Un sistema de álgebra por computador libre. Trabaja con **expresiones simbólicas**, no con números en coma flotante, y esa es la diferencia con una calculadora.

Elemento	Sintaxis
Fin de instrucción	; muestra el resultado, \$ lo calcula en silencio
Asignación	a : 5;
Definición de función	f(x) := x^2 + 1;
Referencia a un resultado	% el último, %3 el tercero
Valor numérico	float(...), bfloat(...) con más precisión
Ayuda	? nombre

```
f(x) := x^3 - 2*x + 1;
solve(f(x) = 0, x);
float(%);
```

La **primera sorpresa** es que solve devuelve las raíces exactas, con radicales, y no números. float las convierte. Confundir las dos representaciones es el error de partida más común, y también la ventaja del programa: mientras se pueda, se trabaja exacto.

7.2 Práctica 1. Números reales y errores

Actividad	Órdenes
Aritmética exacta y aproximada	1/3; frente a float(1/3);
Precisión arbitraria	fpprec: 50\$ bfloat(%pi);
Errores absoluto y relativo	expresiones directas
Cancelación catastrófica	evaluar las dos formas del mismo cálculo

El experimento que fija el tema 1: evaluar $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ y su forma racionalizada para x grande, en precisión limitada, y comparar con el valor exacto.

```
fpprec: 6$
x: 1e10$
bfloat(sqrt(x+1) - sqrt(x));
bfloat(1/(sqrt(x+1) + sqrt(x)));
```

Las dos expresiones son iguales en el papel y dan resultados distintos en la máquina. **Verlo una vez vale más que la explicación.**

7.3 Práctica 2. Sucesiones y series

Actividad	Órdenes
Términos de una sucesión	<code>makelist(a[n], n, 1, 20);</code>
Representar una sucesión	<code>plot2d([discrete, puntos]);</code>
Límite	<code>limit(expr, n, inf);</code>
Suma de una serie	<code>sum(expr, n, 1, inf), simpsum;</code>
Sumas parciales	<code>sum(expr, n, 1, N);</code>

Lo que se pide observar:

- Que las sumas parciales de $\sum 1/n$ **crecen sin límite pero muy despacio**: llegar a 10 exige unos 12,000 términos. La divergencia es real y la gráfica no la delata a simple vista, que es por lo que hace falta el criterio.
- Que $\sum 1/n^2$ se estabiliza enseguida en $\pi^2/6$.
- La velocidad de convergencia de una serie alternada, y la cota de Leibniz comprobada término a término.

7.4 Práctica 3. Continuidad, derivabilidad y ceros

Actividad	Órdenes
Representar una función	<code>plot2d(f(x), [x, -5, 5]);</code>
Límites laterales	<code>limit(f(x), x, a, plus);</code> y minus
Derivada	<code>diff(f(x), x);</code>
Extremos	<code>solve(diff(f(x), x) = 0, x);</code>
Recta tangente	<code>taylor(f(x), x, a, 1);</code>
Raíces numéricas	<code>find_root(f(x), x, a, b);</code>

Los dos guiones que se programan a mano, porque el objetivo es ver el método y no usar la caja negra:

```
biseccion(f, a, b, tol) := block([c],
  while (b - a) > tol do (
    c: (a + b)/2,
    if f(a)*f(c) < 0 then b: c else a: c
  ),
  (a + b)/2 )$

newton(f, x0, tol, nmax) := block([x: x0, k: 0, fp: diff(f(x), x)],
```

```
while abs(f(x)) > tol and k < nmax do (
  x: x - f(x)/subst(x, 'x', fp),
  k: k + 1 ),
[x, k] )$
```

Y lo que se compara: **el número de iteraciones de cada uno** para la misma tolerancia. Bisección necesita unas 20 para 10^{-6} y Newton unas 4, y esa tabla es la convergencia lineal frente a la cuadrática, medida.

Se pide además provocar los fallos de Newton: un punto inicial donde la derivada casi se anula, y el caso del ciclo con $f(x) = x^3 - 2x + 2$ desde $x_0 = 0$. **Un método que falla enseña más que uno que funciona.**

7.5 Práctica 4. Integración

Actividad	Órdenes
Primitiva	<code>integrate(f(x), x);</code>
Integral definida	<code>integrate(f(x), x, a, b);</code>
Impropia	<code>integrate(f(x), x, 1, inf);</code>
Área entre curvas	integrar la diferencia, tras hallar los cortes
Volumen de revolución	<code>%pi*integrate(f(x)^2, x, a, b);</code>

Y los métodos numéricos, programados:

```
trapecios(f, a, b, n) := block([h: (b-a)/n, s],
  s: (f(a) + f(b))/2,
  for i: 1 thru n-1 do s: s + f(a + i*h),
  h*s )$
```

El experimento que cierra el tema 4: calcular $\int_0^1 e^{-x^2} dx$, para la que Maxima devuelve una función de error porque **la primitiva no es elemental**, y compararla con trapecios y Simpson al aumentar n . Se comprueba que el error de trapecios se divide por 4 al doblar n y el de Simpson por 16, que es $O(h^2)$ frente a $O(h^4)$ medido.

7.6 Práctica 5. Interpolación

Actividad	Órdenes
Polinomio de Taylor	<code>taylor(f(x), x, 0, 6);</code>
Interpolación de Lagrange	<code>load(interpol)\$ lagrange(puntos);</code>
Splines cúbicos	<code>cspline(puntos);</code>
Representar juntos	<code>plot2d([f(x), p(x)], [x, a, b]);</code>

Los dos experimentos:

- **Taylor:** dibujar $\sin x$ con sus polinomios de grados 1, 3, 5 y 7 y ver cómo cada uno amplía la zona donde la aproximación sirve, sin dejar de fallar lejos del origen.
- **Runge:** interpolar $1/(1 + 25x^2)$ en $[-1, 1]$ con 5, 9 y 15 nodos equiespaciados y ver que el error **crece** con el grado, sobre todo cerca de los extremos. Después, repetirlo con nodos de Chebyshev y con splines.

El segundo es el que corrige una intuición equivocada, y por eso está en el programa.

7.7 Práctica 6. Sistemas de ecuaciones

Actividad	Órdenes
Definir una matriz	<code>A: matrix([2,1],[1,3]);</code>
Resolver	<code>linsolve([eq1, eq2], [x,y]);</code> o <code>A^-1 . b</code>
Determinante y rango	<code>determinant(A);, rank(A);</code>
Eliminación por pasos	<code>echelon(A);, triangularize(A);</code>
Autovalores	<code>eigenvalues(A);</code>

Lo que se comprueba:

- Un sistema **mal condicionado**: perturbar el término independiente en 10^{-4} y ver cómo se mueve la solución. Con las dos rectas dibujadas, la explicación es visual: son casi paralelas.
- La **eliminación paso a paso**, con `triangularize`, comparada con la hecha a mano.
- **Jacobi y Gauss-Seidel** programados, contando iteraciones hasta la tolerancia y comprobando que Gauss-Seidel necesita menos.

7.8 Sobre las memorias

Lo que se entrega por práctica:

1. Enunciado y planteamiento.
2. Órdenes usadas, con su salida.
3. Gráficas cuando aporten.
4. Interpretación de los resultados.
5. **Comparación con lo que dice la teoría.**

El punto 5 es el que da sentido a la práctica. Una salida de Maxima sin interpretar no es un resultado; lo que se evalúa es explicar por qué la cota del error se cumple, por qué Newton no converge desde ese punto, o por qué el polinomio de grado 15 es peor que el de grado 5.

Nota 7.1. Y la precaución general con cualquier sistema de álgebra por computador: **no comprueba las hipótesis por el usuario**. `integrate` devuelve una primitiva sin avisar de que la función no era continua en el intervalo, y `limit` puede devolver un valor donde el límite no existe. El resultado se contrasta siempre contra lo que la teoría permite.

El material de las prácticas sigue Alaminos et al., 2019 para la parte de cálculo y Burden y Faires, 2004 para la numérica.

Bibliografía

- Alaminos, J., Aparicio, C., Extremera, J., Muñoz, P., & Villena, A. (2019). *Cálculo*. Ediciones E-LectoLibris.
- Burden, R. L., & Faires, J. D. (2004). *Análisis Numérico*. Thomson-Learning.
- Rogawski, J. (2012). *Cálculo. Una variable*. Reverté.
- Stewart, J. (2001). *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas*. International Thomson Editores.