



UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Matemáticas Empresariales

Temario de la asignatura

Ismael Sallami Moreno

Recursos Ingeniería Informática y Ade

Licencia

Este trabajo está bajo una Licencia Creative Commons BY-NC-ND 4.0.

Permisos: Se permite compartir, copiar y redistribuir el material en cualquier medio o formato.

Condiciones: Es necesario dar crédito adecuado, proporcionar un enlace a la licencia e indicar si se han realizado cambios. No se permite usar el material con fines comerciales ni distribuir material modificado.



Matemáticas Empresariales

Ismael Sallami Moreno

<https://elblogdeismael.github.io>

Índice general

1	Conjuntos en $\mathbb{R}^n$. Funciones de varias variables	7
1.1	El espacio $\mathbb{R}^n$	7
1.2	Topología	7
1.3	Funciones de varias variables	8
1.4	Clases de funciones	9
1.5	Conjuntos de nivel	10
1.6	Ejercicios	10
2	Optimización: el método gráfico	13
2.1	Extremos	13
2.2	Optimización con restricciones de desigualdad	13
2.3	Programación lineal en dos variables	14
2.4	Interpretación económica	15
2.5	Ejercicios	16
3	Cálculo diferencial para funciones de varias variables	17
3.1	Derivadas parciales de primer orden	17
3.2	Regla de la cadena	18
3.3	Funciones homogéneas	19
3.4	Derivadas de segundo orden	19
3.5	Fórmula de Taylor	19
3.6	Ejercicios	20
4	Optimización sin restricciones	23
4.1	Puntos críticos	23
4.2	Condición suficiente de segundo orden	23
4.3	Funciones cóncavas y convexas	24

4.4	Procedimiento completo	25
4.5	Aplicación económica	25
4.6	Ejercicios	26
5	Optimización con restricciones de igualdad	27
5.1	El problema	27
5.2	Método de sustitución	27
5.3	Multiplicadores de Lagrange	28
5.4	Condición suficiente	29
5.5	Extremos globales	29
5.6	Interpretación económica del multiplicador	30
5.7	Ejercicios	31
6	Cálculo integral para funciones de varias variables	33
6.1	La integral doble	33
6.2	Teorema de Fubini	33
6.3	Aplicaciones económicas	35
6.4	Ejercicios	36
7	Temario práctico	37
7.1	Práctica 1. Representación gráfica de funciones de dos variables	37
7.2	Práctica 2. Cálculo diferencial	37
7.3	Práctica 3. Optimización sin restricciones	38
7.4	Práctica 4. Optimización con restricciones	38
7.5	Práctica 5. Cálculo integral	39
7.6	Sobre las memorias	39

Conjuntos en $\mathbb{R}^n$. Funciones de varias variables

Tema 1 del programa. La topología de $\mathbb{R}^n$, las funciones reales de varias variables, las clases que aparecen en economía y los conjuntos de nivel.

1.1 El espacio $\mathbb{R}^n$

Un punto de $\mathbb{R}^n$ es una n -upla $(x_1, \dots, x_n)$. En economía cada coordenada suele ser una cantidad: unidades producidas de cada bien, capital y trabajo, o la composición de una cartera.

Definición 1.1 (Distancia euclídea).

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Propiedad	Expresión
No negatividad	$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$, con igualdad solo si coinciden
Simetría	$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$
Desigualdad triangular	$d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$

1.2 Topología

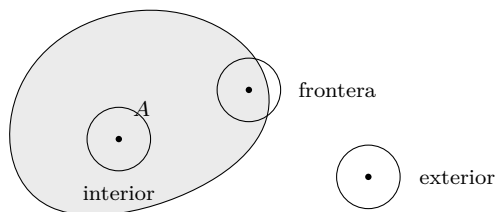
Definición 1.2 (Bola abierta).

$$B(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < r\}$$

Con la bola se clasifican los puntos respecto de un conjunto A :

Tipo de punto	Condición
Interior	alguna bola centrada en él está contenida en A
Exterior	alguna bola centrada en él no corta a A
Frontera	toda bola centrada en él corta a A y a su complementario

Tipo de punto	Condición
De acumulación	toda bola centrada en él contiene puntos de A distintos de él



Y con ellos, los tipos de conjunto:

Conjunto	Definición
Abierto	todos sus puntos son interiores
Cerrado	contiene toda su frontera; su complementario es abierto
Acotado	está contenido en alguna bola
Compacto	cerrado y acotado
Convexo	el segmento entre dos puntos suyos está contenido en él

Nota 1.1. Abierto y cerrado **no son excluyentes ni exhaustivos**. En $\mathbb{R}^n$, el vacío y el total son las dos cosas a la vez, y el intervalo $[0, 1)$ no es ninguna. La pregunta correcta nunca es «¿es abierto o cerrado?» sino «¿es abierto? ¿es cerrado?».

La compacidad es lo que importa en este temario, porque es la hipótesis del teorema de Weierstrass del tema 2: sin ella no hay garantía de que un problema de optimización tenga solución.

La **convexidad** es la otra propiedad central. Los conjuntos de restricciones que aparecen en economía —presupuestos, capacidades, mezclas— suelen ser convexos, y eso es lo que hace que un óptimo local sea global.

1.3 Funciones de varias variables

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Concepto	Definición
Dominio	el conjunto donde se define
Dominio maximal	el mayor subconjunto donde la expresión tiene sentido
Imagen	el conjunto de valores que toma
Gráfica	$\{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

Con $n = 2$ la gráfica es una superficie en $\mathbb{R}^3$; con $n \geq 3$ no se puede dibujar, y por eso se recurre a los conjuntos de nivel.

Determinar el dominio maximal es identificar las restricciones que impone la expresión:

Aparece	Restricción
Un cociente	el denominador no se anula
Una raíz de índice par	el radicando es no negativo
Un logaritmo	el argumento es estrictamente positivo

1.4 Clases de funciones

Clase	Forma	Dónde aparece
De variables separadas	$f(x, y) = g(x) + h(y)$	costes independientes
Polinómica	suma de monomios	modelos sencillos
Racional	cociente de polinomios	ratios y elasticidades
Cobb-Douglas	$Ax^\alpha y^\beta$	producción y utilidad
Forma cuadrática	$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$	riesgo, aproximación de segundo orden

1.4.1 Formas cuadráticas

Con A simétrica, la clasificación de Q decide el carácter de los puntos críticos del tema 4, así que conviene fijarla ya.

Clase	Condición	Con los autovalores de A
Definida positiva	$Q(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq 0$	todos positivos
Definida negativa	$Q(\mathbf{x}) < 0$ para todo $\mathbf{x} \neq 0$	todos negativos
Semidefinida positiva	$Q(\mathbf{x}) \geq 0$	no negativos, con alguno nulo
Semidefinida negativa	$Q(\mathbf{x}) \leq 0$	no positivos, con alguno nulo
Indefinida	toma los dos signos	positivos y negativos

El **criterio de los menores principales**, que evita calcular autovalores:

Clase	Menores principales $\Delta_1, \Delta_2, \dots$
Definida positiva	todos positivos
Definida negativa	signos alternos empezando por $\Delta_1 < 0$

Nota 1.2 . El criterio de los menores principales **solo caracteriza los casos definidos**. Si algún menor se anula no decide, y hay que ir a los autovalores o a los menores principales de todos los órdenes. Aplicarlo a ciegas es la forma habitual de clasificar mal una hessiana.

Ejemplo 1.1 . $Q(x, y) = 2x^2 + 2xy + 3y^2$ tiene matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Los menores son $\Delta_1 = 2 > 0$ y $\Delta_2 = 6 - 1 = 5 > 0$: definida positiva. Se comprueba con los autovalores, que son $(5 \pm \sqrt{5})/2$, los dos positivos.

1.5 Conjuntos de nivel

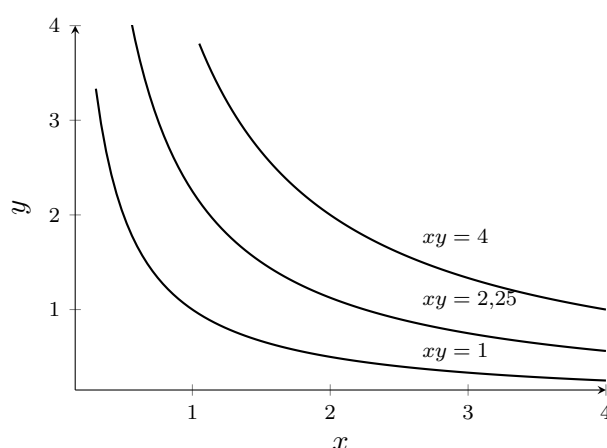
Definición 1.3 . El conjunto de nivel k de f es

$$C_k = \{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) = k\}$$

Con $n = 2$ se llama curva de nivel, y con $n = 3$, superficie de nivel.

Son la forma de ver una función de dos variables sin dibujar en tres dimensiones: se corta la superficie por planos horizontales y se proyecta. Es la técnica de los mapas topográficos, y en economía tiene nombres propios:

Función	Sus curvas de nivel se llaman
Utilidad	curvas de indiferencia
Producción	isocuantas
Coste	isocostes
Beneficio	isobeneficios



Las curvas de nivel de una Cobb-Douglas son hipérbolas, y su forma refleja dos hechos económicos: que se pueden sustituir insumos manteniendo la producción, y que la sustitución es cada vez más costosa según se agota uno de los dos.

1.6 Ejercicios

Ejercicio 1.6.1. Hallar el dominio maximal de $f(x, y) = \frac{\ln(x+y)}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$ y decir si es abierto, cerrado o compacto.

Solución 1.6.1. El logaritmo exige $x+y > 0$ y la raíz del denominador, $4-x^2-y^2 > 0$, es decir $x^2+y^2 < 4$. El dominio es la intersección del semiplano abierto sobre la recta $y = -x$ con el interior del círculo de radio 2.

Es **abierto**, por ser intersección de dos abiertos, y está acotado. No es cerrado ni compacto: le falta toda su frontera.

Ejercicio 1.6.2. Clasificar $Q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy$.

Solución 1.6.2. La matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Los menores principales son $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 2 - 1 = 1$ y $\Delta_3 = 3 \cdot 1 = 3$: todos positivos, luego Q es definida positiva. Se comprueba completando cuadrados: $Q = (x - y)^2 + y^2 + 3z^2$, suma de cuadrados que solo se anula en el origen.

Ejercicio 1.6.3. Dibujar las curvas de nivel de $f(x, y) = x^2 + y^2$ y decir cuáles de esos conjuntos son compactos.

Solución 1.6.3. Son circunferencias centradas en el origen de radio $\sqrt{k}$ para $k > 0$, el origen para $k = 0$ y el vacío para $k < 0$. Todas son cerradas y acotadas, luego **todas son compactas**, incluido el punto y el vacío. Nótese que el conjunto $\{f \leq k\}$, el disco, también es compacto, mientras que $\{f \geq k\}$ es cerrado y no acotado.

El tratamiento de la topología de $\mathbb{R}^n$ y de las funciones de varias variables está en Álvarez de Morales y Fortes, 2020 y Sydsaeter y Hammond, 2012, con problemas resueltos en García Cabello, 2019 y Besada et al., 2001.

Optimización: el método gráfico

Tema 2 del programa. Extremos locales y globales, el teorema de Weierstrass, la optimización con restricciones de desigualdad por el método gráfico y la programación lineal en dos variables.

2.1 Extremos

Definición 2.1 . Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathbf{a} \in D$.

- $\mathbf{a}$ es *máximo global* si $f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in D$.
- Es *máximo local* si la desigualdad se cumple en alguna bola centrada en $\mathbf{a}$.

Los mínimos se definen igual, con la desigualdad al revés.

Todo extremo global es local, y no al revés. La distinción es la que decide si un método sirve: las condiciones de los temas 4 y 5 son **locales**, y para concluir que un óptimo es global hacen falta hipótesis adicionales, normalmente de convexidad.

Teorema 2.1 (Weierstrass). Si f es continua en un conjunto compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, entonces f alcanza en K su máximo y su mínimo absolutos.

Las tres hipótesis hacen falta, y quitarlas se ve enseguida:

Hipótesis que falla	Contraejemplo en $\mathbb{R}$
Continuidad	$f(x) = 1/x$ en $[-1, 1]$ extendida con $f(0) = 0$
Cerrado	$f(x) = x$ en $(0, 1)$: no alcanza extremos
Acotado	$f(x) = x$ en $[0, \infty)$: no está acotada

El teorema es de **existencia**: garantiza que hay solución y no dice dónde. Su papel es justificar la búsqueda antes de emprenderla, y por eso se enuncia siempre al principio de un problema de optimización.

2.2 Optimización con restricciones de desigualdad

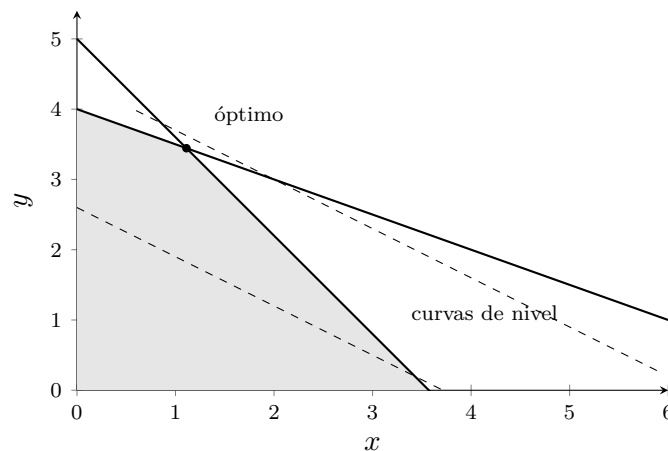
El problema general:

$$\max f(x, y) \quad \text{sujeto a} \quad \begin{cases} g_1(x, y) \leq b_1 \\ \vdots \\ g_m(x, y) \leq b_m \end{cases}$$

El **conjunto factible** es el de los puntos que cumplen todas las restricciones, y el método gráfico en dos variables consiste en dibujarlo y superponer las curvas de nivel de la función objetivo.

2.2.1 El procedimiento

1. Dibujar el conjunto factible, restricción a restricción.
2. Comprobar que es **no vacío**: si lo es, el problema es infactible.
3. Comprobar si es **compacto**: si lo es, Weierstrass garantiza la solución.
4. Dibujar varias curvas de nivel de f e identificar en qué dirección crece.
5. Desplazar la curva de nivel en esa dirección hasta el último punto factible.
6. Ese punto es el óptimo; se calculan sus coordenadas y el valor de f .



Nota 2.1 . Un conjunto factible **no acotado** puede dar un problema sin solución: si la función crece indefinidamente en una dirección factible, el máximo no existe. Antes de buscar hay que comprobar la acotación, o el método gráfico devuelve un punto que no es el óptimo de nada.

2.3 Programación lineal en dos variables

El caso en que la función objetivo y todas las restricciones son lineales:

$$\text{máx } c_1x + c_2y \quad \text{sujeto a} \quad \begin{cases} a_{i1}x + a_{i2}y \leq b_i \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

El conjunto factible es un **polígono convexo**, posiblemente no acotado, y las curvas de nivel son rectas paralelas.

Teorema 2.2 (Fundamental de la programación lineal). Si el conjunto factible es no vacío y acotado, el óptimo se alcanza en un vértice. Si la curva de nivel es paralela a un lado, se alcanza en todos los puntos de ese lado, y en particular en sus dos vértices.

Ese teorema convierte un problema continuo en uno finito: basta evaluar la función objetivo en los vértices y quedarse con el mejor. Es la idea del método símplex, que recorre vértices adyacentes mejorando en cada paso, y la razón de que la programación lineal sea abordable con miles de variables.

2.3.1 El procedimiento en la práctica

1. Dibujar cada restricción como una recta y decidir el semiplano probando un punto, normalmente el origen.
2. Intersecarlos todos: el conjunto factible.
3. Calcular las coordenadas de **todos** los vértices, resolviendo los sistemas 2×2 de las restricciones que se cortan.
4. Evaluar la función objetivo en cada vértice.
5. El mejor valor es el óptimo.

Ejemplo 2.1 .

$$\text{máx } 3x + 2y \quad \text{sujeto a } x + y \leq 4, \quad x + 3y \leq 6, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

Los vértices son $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(0, 2)$ y el corte de las dos restricciones, que resolviendo $x + y = 4$ y $x + 3y = 6$ da $(3, 1)$.

Vértice	$3x + 2y$
$(0, 0)$	0
$(4, 0)$	12
$(3, 1)$	11
$(0, 2)$	4

El máximo es 12 en $(4, 0)$. Conviene mirar el resultado: la solución no está en el corte de las dos restricciones, que es donde la intuición la coloca, sino en un vértice del eje.

2.3.2 Casos particulares

Situación	Qué ocurre
Conjunto factible vacío	problema infactible
Conjunto no acotado en la dirección de mejora	óptimo infinito
Curva de nivel paralela a un lado	infinitas soluciones, todas en ese lado
Vértice degenerado	tres o más restricciones se cortan en él

La tercera es la más frecuente en problemas reales: **la solución óptima no tiene por qué ser única**, y un enunciado que pida «la» solución cuando hay un segmento entero está mal planteado.

2.4 Interpretación económica

En un problema de producción con dos bienes:

Elemento matemático	Significado
Variables	cantidades a producir
Función objetivo	beneficio o coste total

Elemento matemático	Significado
Restricciones	recursos disponibles
Conjunto factible	planes de producción posibles
Vértice óptimo	plan que agota los recursos que limitan
Restricción activa en el óptimo	recurso escaso
Restricción no activa	recurso sobrante

La distinción entre restricción activa y no activa es lo que da valor al modelo: identifica **qué recurso conviene ampliar**. Ampliar uno que sobra no cambia nada, y en el tema 5 los multiplicadores de Lagrange pondrán número a esa mejora.

2.5 Ejercicios

Ejercicio 2.5.1. Resolver gráficamente $\max x + 3y$ sujeto a $2x + y \leq 8$, $x + 2y \leq 10$, $x, y \geq 0$.

Solución 2.5.1. Los vértices: $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(0, 5)$ y el corte de las dos restricciones, que resolviendo $2x + y = 8$ y $x + 2y = 10$ da $(2, 4)$. Evaluando: 0, 4, 15 y 14. El máximo es **15 en** $(0, 5)$.

Nótese que el corte de las dos restricciones no es el óptimo, y que en el óptimo la restricción $2x + y \leq 8$ no está activa: $2 \cdot 0 + 5 = 5 < 8$. Ese recurso sobra.

Ejercicio 2.5.2. ¿Puede un problema de programación lineal con conjunto factible no vacío no tener máximo? ¿Y no tener mínimo?

Solución 2.5.2. Sí, si el conjunto es no acotado en la dirección de crecimiento. Con $\max x$ sujeto a $x \geq 0$, $y \geq 0$ no hay máximo. El mínimo de ese mismo problema sí existe y vale 0, porque el conjunto está acotado por abajo en esa dirección. La existencia de máximo y la de mínimo son preguntas independientes.

Ejercicio 2.5.3. Un problema tiene función objetivo $2x + 2y$ y una restricción $x + y \leq 6$ activa en el óptimo. ¿Cuántas soluciones tiene?

Solución 2.5.3. Infinitas. La curva de nivel $2x + 2y = k$ es paralela a la recta $x + y = 6$, así que todos los puntos del lado del polígono contenido en esa recta dan el mismo valor, 12. El óptimo es un segmento, y el método de los vértices lo detecta porque dos vértices adyacentes dan el mismo valor.

El método gráfico y la programación lineal en dos variables están desarrollados en Barbolla et al., 2006 y García et al., 2010, con problemas resueltos en García Cabello, 2019 y Peris y Carbonell, 1986.

Cálculo diferencial para funciones de varias variables

Tema 3 del programa. Derivadas parciales, vector gradiente, regla de la cadena, funciones homogéneas, derivadas de segundo orden y matriz hessiana, y la fórmula de Taylor.

3.1 Derivadas parciales de primer orden

Definición 3.1 (Derivada parcial).

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a})}{h}$$

Se calcula derivando respecto de x_i y tratando las demás variables como constantes.

En economía cada parcial es una **magnitud marginal**:

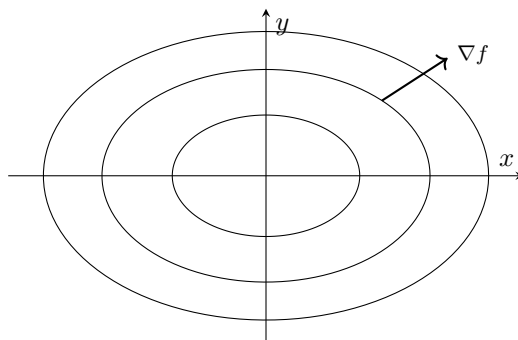
Función	Su parcial se llama
Producción	productividad marginal del factor
Utilidad	utilidad marginal del bien
Coste	coste marginal
Beneficio	beneficio marginal

Definición 3.2 (Gradiente).

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right)$$

Proposición 3.1 . El gradiente apunta en la dirección de máximo crecimiento de f , su módulo es esa tasa de crecimiento, y es **ortogonal** al conjunto de nivel que pasa por el punto.

La ortogonalidad al conjunto de nivel es la clave geométrica del tema 5: en un óptimo con restricciones, el gradiente de la función objetivo y el de la restricción son paralelos, y de ahí salen los multiplicadores de Lagrange.



Nota 3.1 . Que existan las derivadas parciales **no garantiza la continuidad**, a diferencia de lo que ocurre con una variable. La función que vale $xy/(x^2 + y^2)$ fuera del origen y 0 en él tiene las dos parciales en el origen y no es continua allí. Lo que sí implica continuidad es la diferenciabilidad, y una condición cómoda para tenerla es que las parciales existan y sean continuas.

3.2 Regla de la cadena

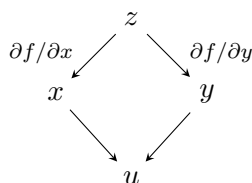
Si $z = f(x, y)$ con $x = x(t)$ e $y = y(t)$:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Y si dependen de varias variables, $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

La regla se recuerda con el **diagrama de dependencias**: se suman todos los caminos desde z hasta la variable, multiplicando las derivadas de cada tramo.



3.2.1 Derivación implícita

Si una ecuación $F(x, y) = 0$ define y como función de x :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y}$$

siempre que $\partial F / \partial y \neq 0$.

Es lo que da la **pendiente de una curva de nivel** sin despejar, y en economía se llama relación marginal de sustitución: cuánto hay que aumentar un bien al reducir el otro para mantener el mismo nivel de utilidad.

3.3 Funciones homogéneas

Definición 3.3 . f es homogénea de grado r si $f(t\mathbf{x}) = t^r f(\mathbf{x})$ para todo $t > 0$.

Teorema 3.1 (Euler). Si f es homogénea de grado r y diferenciable,

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = r f(\mathbf{x})$$

Interpretación económica del grado, con una función de producción:

Grado	Rendimientos a escala
$r > 1$	crecientes: doblar los factores más que dobla la producción
$r = 1$	constantes
$r < 1$	decrecientes

Una **Cobb-Douglas** $Ax^\alpha y^\beta$ es homogénea de grado $\alpha + \beta$, y por eso ese exponente total es lo que se mira para clasificar sus rendimientos.

El teorema de Euler con $r = 1$ dice que la producción se agota repartiendo a cada factor su productividad marginal por la cantidad empleada. Es el resultado que sostiene la teoría de la distribución en competencia perfecta.

3.4 Derivadas de segundo orden

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$$

Teorema 3.2 (Schwarz). Si las derivadas parciales segundas cruzadas existen y son continuas en un entorno del punto, coinciden:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Gracias a Schwarz, la **matriz hessiana** es simétrica:

$$H f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}$$

Y eso es lo que permite aplicarle la clasificación de formas cuadráticas del tema 1, que es exactamente lo que hará el tema 4 para decidir si un punto crítico es máximo, mínimo o silla.

3.5 Fórmula de Taylor

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T H f(\mathbf{a}) (\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

Orden	Aproximación	Geometría
Primero	lineal	el plano tangente
Segundo	cuadrática	añade la curvatura

La aproximación lineal es lo que en economía se llama **análisis marginal**: estimar el efecto de un cambio pequeño multiplicando la derivada por el incremento.

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$$

Ejemplo 3.1 . Una empresa produce $Q(K, L) = 10K^{0.4}L^{0.6}$ y opera en $K = 100$, $L = 100$, donde $Q = 1000$.

Las productividades marginales son $Q_K = 4(L/K)^{0.6} = 4$ y $Q_L = 6(K/L)^{0.4} = 6$. Aumentando el capital en 2 y reduciendo el trabajo en 1:

$$\Delta Q \approx 4 \cdot 2 + 6 \cdot (-1) = 2$$

La producción sube en torno a dos unidades. El valor exacto es 2,00 con dos decimales, así que en cambios pequeños la aproximación lineal basta.

Nota 3.2 . La aproximación lineal solo vale **cerca del punto**, y el error crece con el cuadrado del incremento. Usarla para un cambio del 50 % en un factor es un abuso habitual en los ejercicios mal planteados: ahí hace falta el término de segundo orden, o directamente evaluar la función.

3.6 Ejercicios

Ejercicio 3.6.1. Para $f(x, y) = x^3 + 2x^2y - y^3$, calcular el gradiente y la hessiana en $(1, 1)$ y comprobar Schwarz.

Solución 3.6.1. $f_x = 3x^2 + 4xy$ y $f_y = 2x^2 - 3y^2$, luego $\nabla f(1, 1) = (7, -1)$.

Las segundas: $f_{xx} = 6x + 4y = 10$, $f_{yy} = -6y = -6$, $f_{xy} = 4x = 4$ y $f_{yx} = 4x = 4$. Coinciden, como garantiza Schwarz al ser polinómicas y por tanto continuas.

$$H f(1, 1) = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3.6.2. Comprobar que $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{xy}$ es homogénea y verificar el teorema de Euler.

Solución 3.6.2. $f(tx, ty) = \frac{t^2(x^2 + y^2)}{t^2xy} = f(x, y)$, así que es homogénea de grado 0.

Euler exige entonces $xf_x + yf_y = 0$. En efecto, $f_x = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}$ y $f_y = \frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}$, y

$$x \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2} \right) + y \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2} \right) = \frac{x}{y} - \frac{y}{x} + \frac{y}{x} - \frac{x}{y} = 0$$

Grado 0 significa que la función solo depende del cociente x/y , que es lo que se ve al escribirla como $x/y + y/x$.

Ejercicio 3.6.3. El coste de una empresa es $C(x, y) = 3x^2 + xy + 2y^2$. Estimar el cambio en el coste al pasar de $(10, 5)$ a $(10,2, 4,9)$.

Solución 3.6.3. $C_x = 6x + y = 65$ y $C_y = x + 4y = 30$ en $(10, 5)$. Con $\Delta x = 0,2$ y $\Delta y = -0,1$:

$$\Delta C \approx 65 \cdot 0,2 + 30 \cdot (-0,1) = 13 - 3 = 10$$

El coste sube unas 10 unidades. El valor exacto es 10,12, así que el error de la aproximación es del 1,2 %, coherente con incrementos del orden del 2 %.

El cálculo diferencial en varias variables está desarrollado en Álvarez de Morales y Fortes, 2020, Stewart, 2002 y Sydsaeter y Hammond, 2012, con problemas resueltos en García Cabello, 2019 y Besada et al., 2001.

Optimización sin restricciones

Tema 4 del programa. Puntos críticos, las condiciones necesaria y suficiente de extremo local, los puntos de silla y las funciones cóncavas y convexas.

4.1 Puntos críticos

Teorema 4.1 (Condición necesaria de primer orden). Si f es diferenciable y tiene un extremo local en $\mathbf{a}$ interior al dominio, entonces $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

Definición 4.1 (Punto crítico). Punto donde el gradiente se anula, o donde alguna parcial no existe.

Es necesaria y no suficiente. El gradiente se anula en máximos, en mínimos y en puntos de silla, así que un punto crítico es solo un candidato.

Y la condición exige que el punto sea **interior**: en la frontera del dominio puede haber extremos con gradiente no nulo, que es lo que hace falta el tema 5.

Ejemplo 4.1 . $f(x, y) = x^3$ tiene $\nabla f = (3x^2, 0)$, que se anula en toda la recta $x = 0$. Ninguno de esos puntos es extremo: la función crece al aumentar x y decrece al reducirlo. Que el gradiente se anule no dice nada por sí solo.

4.2 Condición suficiente de segundo orden

Teorema 4.2 . Sea $\mathbf{a}$ un punto crítico de f , con segundas derivadas continuas, y sea $H = H f(\mathbf{a})$.

- Si H es definida positiva, $\mathbf{a}$ es mínimo local estricto.
- Si H es definida negativa, $\mathbf{a}$ es máximo local estricto.
- Si H es indefinida, $\mathbf{a}$ es punto de silla.
- Si H es semidefinida, el criterio **no decide**.

Con dos variables, la regla se escribe con el determinante y la traza:

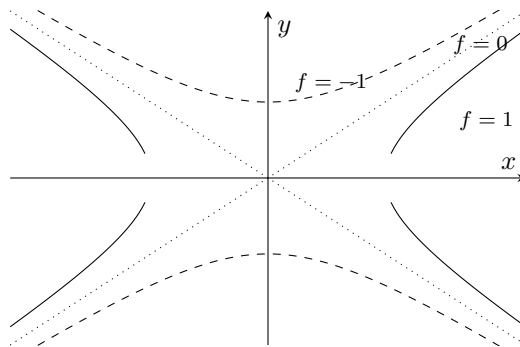
$$D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

D	f_{xx}	Conclusión
> 0	> 0	mínimo local
> 0	< 0	máximo local

D	f_{xx}	Conclusión
< 0	—	punto de silla
$= 0$	—	no decide

Nota 4.1 . El caso $D = 0$ hay que estudiarlo aparte, y no es raro. Para $f(x, y) = x^4 + y^4$ y para $g(x, y) = x^4 - y^4$ el origen es punto crítico con hessiana nula: en el primero es mínimo y en el segundo es silla. El criterio de segundo orden es ciego a lo que decide el cuarto.

4.2.1 Puntos de silla



El ejemplo canónico es $f(x, y) = x^2 - y^2$ en el origen: siguiendo el eje x hay un mínimo y siguiendo el eje y un máximo. Su hessiana es $\text{diag}(2, -2)$, indefinida. Sus curvas de nivel son las hipérbolas de la figura, y las dos rectas punteadas —el nivel cero— separan la zona donde la función es positiva de aquella en que es negativa: el origen está en la frontera de las dos, que es justo lo que impide que sea extremo.

De ahí sale la advertencia práctica: comprobar el comportamiento a lo largo de unas cuantas direcciones no basta para concluir que hay extremo. Hay funciones con mínimo a lo largo de **toda recta** por el origen y que no tienen mínimo allí.

4.3 Funciones cóncavas y convexas

Definición 4.2 . f es convexa en un conjunto convexo C si para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ y $t \in [0, 1]$

$$f(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) \leq tf(\mathbf{x}) + (1-t)f(\mathbf{y})$$

Es cóncava si se cumple la desigualdad contraria.

Geométricamente: **una función es convexa si su gráfica queda por debajo de sus cuerdas**, y cóncava si queda por encima.

Proposición 4.1 (Caracterización con la hessiana). Si f tiene segundas derivadas continuas en un abierto convexo:

- f es convexa $\iff Hf$ es semidefinida positiva en todo punto.
- f es cóncava $\iff Hf$ es semidefinida negativa en todo punto.

Y el resultado que hace útil todo lo anterior:

Teorema 4.3 . Si f es convexa en un convexo C , todo mínimo local es **global**. Si es cóncava, todo máximo local es global. Si además es estrictamente convexa o cóncava, el óptimo es único.

Ese teorema es la única forma práctica de pasar de local a global en este temario. Sin convexidad, comprobar que un punto es máximo global exige comparar con todos los demás candidatos y con el comportamiento en el infinito.

Función	Carácter
Lineal	cóncava y convexa a la vez
Forma cuadrática definida positiva	estrictamente convexa
$e^x, x^2, -\ln x$	convexas
$\ln x, \sqrt{x}$	cóncavas
Cobb-Douglas con $\alpha + \beta \leq 1$	cóncava

La última fila es la que da sentido económico: **rendimientos no crecientes equivalen a concavidad**, y la concavidad es lo que garantiza que el óptimo de la empresa esté bien definido.

4.4 Procedimiento completo

1. Calcular ∇f y resolver $\nabla f = \mathbf{0}$: los puntos críticos.
2. Calcular Hf y evaluarla en cada punto crítico.
3. Clasificarla con los menores principales.
4. Concluir el carácter local de cada punto.
5. Para el carácter global, comprobar la convexidad o concavidad, o estudiar el comportamiento en el infinito.

Ejemplo 4.2 . $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Paso 1: $\nabla f = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x)$. De la primera, $y = x^2$; sustituyendo en la segunda, $x^4 = x$, es decir $x(x^3 - 1) = 0$, con soluciones $x = 0$ y $x = 1$. Los puntos críticos son $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

Paso 2: $Hf = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$.

En $(0, 0)$: $D = 0 - 9 = -9 < 0$, punto de silla.

En $(1, 1)$: $D = 36 - 9 = 27 > 0$ y $f_{xx} = 6 > 0$, mínimo local, con $f(1, 1) = -1$.

Paso 5: no es global, porque $f(x, 0) = x^3 \rightarrow -\infty$. La función no está acotada inferiormente y no tiene mínimo global.

El último paso es el que se olvida. Un mínimo local no es un mínimo, y comprobarlo cuesta una línea.

4.5 Aplicación económica

El problema típico de la empresa:

$$\text{máx } B(x, y) = I(x, y) - C(x, y)$$

La condición de primer orden dice que **el ingreso marginal iguala al coste marginal** en cada producto, que es la traducción exacta de $\nabla B = 0$. Y la de segundo orden, que la hessiana sea definida negativa, es la condición de que el beneficio sea cóncavo, sin la cual el punto podría ser un mínimo.

Ejemplo 4.3 . Una empresa vende dos productos con precios $p_1 = 100 - 2x$ y $p_2 = 80 - y$, y coste $C = 10x + 10y$. El beneficio es

$$B = (100 - 2x)x + (80 - y)y - 10x - 10y = 90x - 2x^2 + 70y - y^2$$

De $\nabla B = (90 - 4x, 70 - 2y) = 0$ salen $x = 22,5$ e $y = 35$. La hessiana es $\text{diag}(-4, -2)$, definida negativa en todo punto, así que B es estrictamente cóncava y el máximo es **global y único**, con $B = 1012,5 + 1225 = 2237,5$.

4.6 Ejercicios

Ejercicio 4.6.1. Hallar y clasificar los puntos críticos de $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 5$.

Solución 4.6.1. $\nabla f = (2x - 4, 2y + 6) = 0$ da el único punto crítico $(2, -3)$. La hessiana es $\text{diag}(2, 2)$, definida positiva en todo punto, así que f es estrictamente convexa y $(2, -3)$ es el mínimo **global**, con $f = -8$. Se confirma completando cuadrados: $f = (x - 2)^2 + (y + 3)^2 - 8$.

Ejercicio 4.6.2. Clasificar el origen para $f(x, y) = x^4 + y^4$ y para $g(x, y) = x^4 - y^4$.

Solución 4.6.2. En los dos casos el gradiente y la hessiana se anulan en el origen, así que el criterio de segundo orden no decide. Directamente: $f \geq 0$ con igualdad solo en el origen, luego es mínimo global estricto. Y $g(x, 0) = x^4 > 0$ mientras $g(0, y) = -y^4 < 0$, así que el origen es punto de silla. Misma hessiana, conclusiones opuestas.

Ejercicio 4.6.3. Una empresa produce con $Q = K^{0,3}L^{0,5}$, paga 3 por unidad de capital y 2 por unidad de trabajo, y vende a precio 10. Plantear el problema y decir si el óptimo será global.

Solución 4.6.3. $\max B(K, L) = 10K^{0,3}L^{0,5} - 3K - 2L$ sobre $K, L > 0$.

Como $0,3 + 0,5 = 0,8 < 1$, la Cobb-Douglas es estrictamente cóncava en el ortante positivo, y restarle una función lineal conserva la concavidad estricta. Por tanto el punto crítico que salga de $\nabla B = 0$ es el máximo global y es único, sin necesidad de comprobar la hessiana punto a punto.

La optimización sin restricciones está desarrollada en Barbolla et al., 2006 y Sydsaeter y Hammond, 2012, con problemas resueltos en García Cabello, 2019 y García et al., 2010.

Optimización con restricciones de igualdad

Tema 5 del programa. El método de sustitución, los multiplicadores de Lagrange con sus puntos singulares, regulares y estacionarios, la determinación de extremos locales y globales, y la interpretación económica de los multiplicadores.

5.1 El problema

$$\text{opt } f(\mathbf{x}) \quad \text{sujeto a} \quad g_1(\mathbf{x}) = b_1, \dots, g_m(\mathbf{x}) = b_m$$

Las restricciones son igualdades, así que el conjunto factible es una superficie, no una región. La condición de primer orden del tema 4 **deja de valer**: el gradiente no tiene por qué anularse en el óptimo, porque solo se compite en las direcciones que la restricción permite.

5.2 Método de sustitución

Si de la restricción se puede despejar una variable, se sustituye en la función objetivo y queda un problema sin restricciones con una variable menos.

Ejemplo 5.1 . máx xy sujeto a $x + y = 10$. Despejando $y = 10 - x$:

$$h(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$$

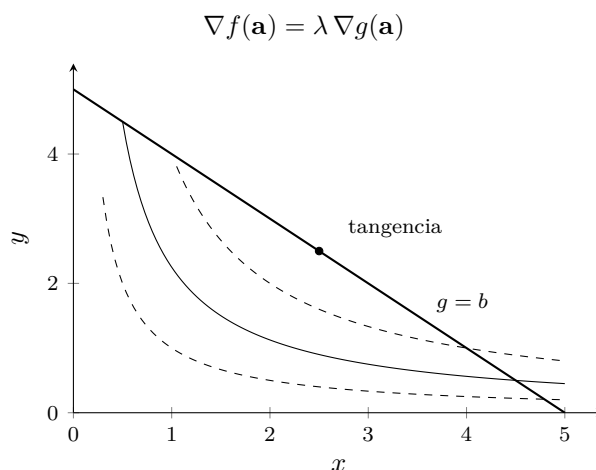
$h'(x) = 10 - 2x = 0$ da $x = 5$, y $h'' = -2 < 0$, así que es máximo. La solución es $(5, 5)$ con valor 25.

Ventaja	Inconveniente
Reduce a un problema conocido	solo sirve si se puede despejar
No introduce variables nuevas	despejar puede romper la simetría del problema
Directo con restricciones lineales	inviable con varias restricciones no lineales

Y una trampa: al despejar hay que arrastrar el dominio. Si la restricción es $x^2 + y^2 = 1$ y se despeja $y = \sqrt{1 - x^2}$, se está perdiendo media circunferencia.

5.3 Multiplicadores de Lagrange

La idea geométrica: en un óptimo restringido, **la curva de nivel de f es tangente a la restricción**. Si se cortasen, se podría avanzar a lo largo de la restricción hacia un nivel mejor. Tangencia significa gradientes paralelos.



Definición 5.1 (Función lagrangiana).

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^m \lambda_j (g_j(\mathbf{x}) - b_j)$$

Teorema 5.1 (Condición necesaria de Lagrange). Si $\mathbf{a}$ es extremo local del problema restringido y es un *punto regular*, existen multiplicadores $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tales que

$$\nabla L(\mathbf{a}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}$$

es decir, se anulan las parciales respecto de las x_i y respecto de los λ_j —que devuelven las restricciones—.

5.3.1 Puntos regulares y singulares

Definición 5.2 . $\mathbf{a}$ es un *punto regular* del sistema de restricciones si los gradientes $\nabla g_1(\mathbf{a}), \dots, \nabla g_m(\mathbf{a})$ son linealmente independientes. En otro caso es *singular*.

La regularidad es una hipótesis del teorema, no un tecnicismo. En un punto singular puede haber un extremo sin que exista ningún multiplicador, y el método lo pierde.

Ejemplo 5.2 . mín x sujeto a $y^2 = x^3$. El óptimo está en el origen, donde $\nabla g = (-3x^2, 2y) = (0, 0)$: es singular. La condición de Lagrange exigiría $(1, 0) = \lambda(0, 0)$, imposible. El método no encuentra un óptimo que existe.

Por eso el procedimiento correcto tiene **dos listas de candidatos**: los puntos estacionarios del lagrangiano y los puntos singulares del sistema de restricciones.

5.3.2 Puntos estacionarios

Los que resuelven $\nabla L = \mathbf{0}$. Con una restricción y dos variables, el sistema es

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g(x, y) = b \end{cases}$$

Tres ecuaciones y tres incógnitas. La técnica habitual es dividir las dos primeras para eliminar λ , con cuidado de tratar aparte el caso en que algún g_i se anule.

5.4 Condición suficiente

Se estudia la **hessiana orlada** del lagrangiano, o equivalentemente la hessiana de L restringida al espacio tangente a las restricciones.

Con una restricción y dos variables:

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{pmatrix}$$

$\det \bar{H}$	Conclusión
> 0	máximo local
< 0	mínimo local
$= 0$	no decide

Nota 5.1 . Los signos van **al revés** que en el caso sin restricciones, y es el error más repetido del tema. La razón es que la orla añade una fila y una columna, lo que cambia la paridad del determinante.

Cuando la estructura del problema lo permite, hay un camino más corto: si f es cóncava y las restricciones lineales, el estacionario es **máximo global** sin más comprobación.

5.5 Extremos globales

El procedimiento completo cuando el conjunto factible es compacto:

1. Comprobar que f es continua y el conjunto factible compacto: por Weierstrass hay máximo y mínimo.
2. Hallar los puntos estacionarios del lagrangiano.
3. Hallar los puntos singulares del sistema de restricciones.
4. Evaluar f en todos los candidatos.
5. El mayor valor es el máximo global y el menor el mínimo global.

Con conjunto factible compacto no hace falta la condición de segundo orden. Basta comparar valores, y es más rápido y más seguro que calcular hessianas orladas.

Ejemplo 5.3 . Optimizar $f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeto a $x^2 + xy + y^2 = 3$.

El conjunto factible es una elipse: compacto. Lagrange:

$$2x = \lambda(2x + y), \quad 2y = \lambda(x + 2y), \quad x^2 + xy + y^2 = 3$$

Restando las dos primeras: $2(x - y) = \lambda(x - y)$, así que $x = y$ o $\lambda = 2$.

Con $x = y$: la restricción da $3x^2 = 3$, es decir $(1, 1)$ y $(-1, -1)$, con $f = 2$.

Con $\lambda = 2$: la primera ecuación da $2x = 4x + 2y$, o sea $y = -x$; la restricción da $x^2 = 3$, es decir $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ y $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, con $f = 6$.

No hay puntos singulares, porque ∇g solo se anula en el origen y este no está en la elipse. Por tanto el mínimo global es 2 y el máximo global 6.

5.6 Interpretación económica del multiplicador

Teorema 5.2 (Del sobre). Si $V(b)$ es el valor óptimo del problema en función del término independiente de la restricción, entonces

$$\frac{dV}{db} = \lambda$$

El multiplicador es el precio sombra del recurso: lo que mejora el óptimo por cada unidad adicional de restricción disponible.

Contexto	Qué mide λ
Maximizar utilidad con restricción de renta	utilidad marginal de la renta
Minimizar coste con restricción de producción	coste marginal de producir
Maximizar producción con restricción de presupuesto	producto marginal del dinero

De ahí sale una regla de decisión inmediata: **si λ supera el precio de mercado del recurso, conviene comprar más**; si no lo supera, conviene venderlo.

Y con varias restricciones, comparar los λ_j dice **cuál de los recursos limita de verdad**: el de multiplicador mayor es donde una unidad extra rinde más.

Ejemplo 5.4 . máx $U(x, y) = xy$ sujeto a $2x + 4y = 100$, una restricción de presupuesto con precios 2 y 4 y renta 100.

Lagrange: $y = 2\lambda$ y $x = 4\lambda$, y sustituyendo en la restricción, $8\lambda + 8\lambda = 100$, de donde $\lambda = 6,25$, $x = 25$ e $y = 12,5$, con $U = 312,5$.

El multiplicador dice que una unidad más de renta aportaría unas 6,25 unidades de utilidad. Comprobación: con renta 101 el óptimo da $U = 318,78$, y la diferencia es 6,28. La aproximación es buena porque el incremento es pequeño.

Nótese además el resultado clásico que asoma: en el óptimo, $U_x/p_x = U_y/p_y = \lambda$. **La utilidad marginal por euro gastado se iguala en todos los bienes**, y esa es la ley de la igualdad de las utilidades marginales ponderadas.

5.7 Ejercicios

Ejercicio 5.7.1. Optimizar $f(x, y) = x + y$ sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$.

Solución 5.7.1. Lagrange: $1 = 2\lambda x$ y $1 = 2\lambda y$, de donde $x = y$ —nótese que $\lambda \neq 0$, porque si lo fuera la primera ecuación sería $1 = 0$ —. La restricción da $2x^2 = 2$, es decir $(1, 1)$ y $(-1, -1)$.

El conjunto es compacto, así que basta evaluar: $f(1, 1) = 2$ es el máximo global y $f(-1, -1) = -2$ el mínimo. No hay singulares: $\nabla g = (2x, 2y)$ solo se anula en el origen, que no está en la circunferencia.

Ejercicio 5.7.2. Una empresa produce $Q = \sqrt{KL}$ y quiere producir 100 unidades al mínimo coste, con precios $r = 4$ para el capital y $w = 1$ para el trabajo. Hallar el óptimo e interpretar el multiplicador.

Solución 5.7.2. mín $4K + L$ sujeto a $\sqrt{KL} = 100$, es decir $KL = 10\,000$.

Lagrange con $g = KL$: $4 = \lambda L$ y $1 = \lambda K$, de donde $L = 4K$. La restricción da $4K^2 = 10\,000$, es decir $K = 50$ y $L = 200$, con coste $200 + 200 = 400$.

De $1 = \lambda K$ sale $\lambda = 1/50 = 0,02$. Como aquí se minimiza, el multiplicador es el **coste marginal**: producir una unidad más de Q costaría unos 0,02 por cada unidad de KL , es decir unos 4 euros por unidad de producto tras aplicar la regla de la cadena. Que el gasto se reparta a partes iguales entre los dos factores es propio de la Cobb-Douglas con exponentes iguales.

Ejercicio 5.7.3. ¿Por qué hay que buscar también los puntos singulares?

Solución 5.7.3. Porque el teorema de Lagrange solo garantiza la existencia de multiplicadores en puntos regulares. En un punto singular, los gradientes de las restricciones son linealmente dependientes y la condición $\nabla f = \sum \lambda_j \nabla g_j$ puede ser imposible aunque allí haya un extremo. Omitirlos deja fuera candidatos válidos y puede dar por óptimo global uno que no lo es.

El método de los multiplicadores de Lagrange y su interpretación económica están desarrollados en Barbolla et al., 2006, Sydsaeter y Hammond, 2012 y García et al., 2010, con problemas resueltos en García Cabello, 2019 y Peris y Carbonell, 1986.

Cálculo integral para funciones de varias variables

Tema 6 del programa. Integrales dobles sobre recintos del plano, el teorema de Fubini y las aplicaciones económicas.

6.1 La integral doble

Igual que la integral simple aproximaba el área bajo una curva con rectángulos, la doble aproxima el volumen bajo una superficie con prismas.

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim \sum_{i,j} f(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij}$$

Teorema 6.1 . Toda función continua sobre un recinto acotado y con frontera de área nula es integrable.

Propiedad	Expresión
Linealidad	$\iint (\alpha f + \beta g) = \alpha \iint f + \beta \iint g$
Aditividad	$\iint_{R_1 \cup R_2} = \iint_{R_1} + \iint_{R_2}$ si no se solapan
Monotonía	$f \leq g \Rightarrow \iint f \leq \iint g$
Área del recinto	$\iint_R 1 dA = \text{área}(R)$

La última fila es la más usada en la práctica: **integrar la función constante 1 da el área**, y sirve para comprobar que los límites de integración están bien puestos.

6.2 Teorema de Fubini

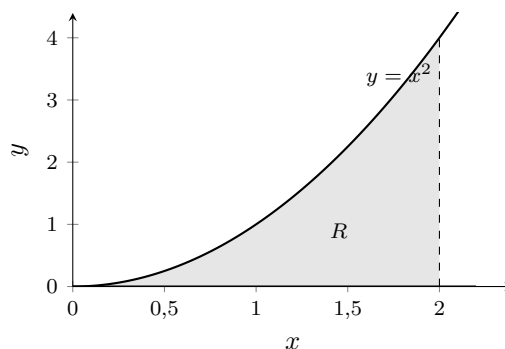
Teorema 6.2 (Fubini). Si f es continua sobre el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$,

$$\iint_R f dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

Es el resultado que convierte una integral doble en dos simples encadenadas, que es lo único que se sabe calcular. En el rectángulo el orden es indiferente; en un recinto general no lo es tanto, y elegirlo bien puede ser la diferencia entre una integral inmediata y una imposible.

6.2.1 Recintos generales

Tipo	Descripción	Integral
Tipo I	$a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$	$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f \, dy \, dx$
Tipo II	$c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$	$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f \, dx \, dy$



La regla de oro: dibujar el recinto siempre. Los límites de integración salen del dibujo y no de manipular las desigualdades, y el error clásico —poner límites variables en la integral exterior— se detecta de un vistazo, porque el resultado dependería de una variable que debía haber desaparecido.

Ejemplo 6.1 . $\iint_R xy \, dA$ con R limitado por $y = x^2$, $y = 0$ y $x = 2$.

Como tipo I:

$$\int_0^2 \int_0^{x^2} xy \, dy \, dx = \int_0^2 x \frac{x^4}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x^5 \, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{64}{6} = \frac{16}{3}$$

Como tipo II saldría $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 xy \, dx \, dy$, con el mismo valor y más trabajo por la raíz.

6.2.2 Cambio de orden

A veces una integral no se puede calcular en el orden dado y sí en el otro. El procedimiento es el mismo siempre: **dibujar el recinto a partir de los límites que hay, y volver a leerlo en el otro orden.**

Ejemplo 6.2 .

$$\int_0^1 \int_x^1 e^{y^2} \, dy \, dx$$

La primitiva de e^{y^2} no es elemental, así que en ese orden no hay nada que hacer. El recinto es $0 \leq x \leq 1$, $x \leq y \leq 1$, es decir el triángulo bajo la diagonal. Leído al revés: $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq x \leq y$.

$$\int_0^1 \int_0^y e^{y^2} \, dx \, dy = \int_0^1 y e^{y^2} \, dy = \left[\frac{1}{2} e^{y^2} \right]_0^1 = \frac{e-1}{2}$$

El factor y que aparece al integrar en x es justamente el que hace inmediata la integral.

6.3 Aplicaciones económicas

Aplicación	Integral
Volumen bajo una superficie	$\iint_R f \, dA$ con $f \geq 0$
Área de un recinto	$\iint_R 1 \, dA$
Valor medio de una función	$\frac{1}{\text{área}(R)} \iint_R f \, dA$
Beneficio total sobre un rango de producción	$\iint_R B(x, y) \, dA$
Excedente del consumidor	integral bajo la demanda menos el gasto
Coste total a partir del coste marginal	integrar las parciales

El **valor medio** es la aplicación más frecuente en un contexto empresarial: si $f(x, y)$ es el beneficio unitario según dos variables que fluctúan dentro de un rango, su valor medio sobre ese rango estima el beneficio esperado cuando las combinaciones son igualmente probables.

Ejemplo 6.3 . El beneficio unitario de un producto es $B(p, c) = 3p - 2c$, con el precio p variando entre 10 y 14 y el coste c entre 4 y 6. El beneficio medio es

$$\frac{1}{8} \int_{10}^{14} \int_4^6 (3p - 2c) \, dc \, dp$$

La integral interior da $[3pc - c^2]_4^6 = 6p - 20$, y entonces

$$\frac{1}{8} \int_{10}^{14} (6p - 20) \, dp = \frac{1}{8} [3p^2 - 20p]_{10}^{14} = \frac{1}{8} (588 - 280 - 300 + 200) = \frac{208}{8} = 26$$

El área del rectángulo es $4 \cdot 2 = 8$, que es lo que divide.

6.3.1 Recuperar una función a partir de sus marginales

Si se conocen $\partial C/\partial x$ y $\partial C/\partial y$, la función de coste se recupera integrando, con una precaución: **la constante de integración de la primera integral es una función de la otra variable.**

Ejemplo 6.4 . $C_x = 2x + y$ y $C_y = x + 4y$. Integrando la primera respecto de x :

$$C(x, y) = x^2 + xy + \varphi(y)$$

Derivando respecto de y : $C_y = x + \varphi'(y)$, que comparado con $x + 4y$ da $\varphi'(y) = 4y$, es decir $\varphi(y) = 2y^2 + k$. Por tanto

$$C(x, y) = x^2 + xy + 2y^2 + k$$

con k el coste fijo, que solo se determina con un dato adicional.

Nota 6.1 . No todo par de funciones son las parciales de una misma función. La condición es la de Schwarz: $\partial C_x/\partial y = \partial C_y/\partial x$. Con $C_x = y$ y $C_y = 2x$ el sistema es incompatible —1 frente a 2— y el procedimiento anterior lleva a una contradicción. Comprobarlo antes de integrar ahorra el trabajo.

6.4 Ejercicios

Ejercicio 6.4.1. Calcular $\iint_R (x+y) dA$ sobre el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$.

Solución 6.4.1. El recinto es $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1-x$.

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} (x+y) dy dx = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left(x(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx$$

El integrando se simplifica a $\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}$, cuya integral entre 0 y 1 es $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Ejercicio 6.4.2. Cambiar el orden de integración en $\int_0^2 \int_{y/2}^1 f(x,y) dx dy$.

Solución 6.4.2. El recinto es $0 \leq y \leq 2$, $y/2 \leq x \leq 1$, es decir el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(1,2)$, bajo la recta $y = 2x$. Leído en el otro orden: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2x$, así que

$$\int_0^1 \int_0^{2x} f(x,y) dy dx$$

Ejercicio 6.4.3. Comprobar si existe una función de coste con $C_x = 3x^2y$ y $C_y = x^3 + 2y$, y hallarla si existe.

Solución 6.4.3. Condición de Schwarz: $\partial C_x / \partial y = 3x^2$ y $\partial C_y / \partial x = 3x^2$. Coinciden, luego existe. Integrando la primera respecto de x : $C = x^3y + \varphi(y)$. Derivando respecto de y : $x^3 + \varphi'(y)$, que comparado con $x^3 + 2y$ da $\varphi(y) = y^2 + k$. Por tanto $C(x,y) = x^3y + y^2 + k$.

El cálculo integral en varias variables está desarrollado en Stewart, 2002 y Álvarez de Morales y Fortes, 2020, con aplicaciones económicas en Haeussler y Paul, 2008 y problemas resueltos en García Cabello, 2019.

Temario práctico

Las prácticas de ordenador del programa: representación gráfica de funciones de dos variables, cálculo diferencial, optimización con y sin restricciones, y cálculo integral.

El objetivo no es aprender un programa: es **ver lo que en el papel se demuestra** y hacer los cálculos que a mano no salen. Las órdenes de abajo son de Maxima, que es el sistema libre habitual en estas asignaturas; la traducción a cualquier otro es inmediata.

7.1 Práctica 1. Representación gráfica de funciones de dos variables

Actividad	Órdenes
Superficie	<code>plot3d(f(x,y), [x,-2,2], [y,-2,2]);</code>
Curvas de nivel	<code>contour_plot(f(x,y), [x,-2,2], [y,-2,2]);</code>
Recinto del plano	<code>implicit_plot(g(x,y)=0, ...);</code>
Varias curvas de nivel	opción <code>[gnuplot_preamble, "set cntrparam levels 10"]</code>

Lo que se pide observar:

- La **superficie y sus curvas de nivel a la vez**, para ver que las curvas son los cortes horizontales proyectados.
- Cómo las curvas de nivel se **aprietan donde la función crece deprisa**, que es la lectura del módulo del gradiente en un mapa topográfico.
- Las Cobb-Douglas y sus isocuantas hiperbólicas, comparando exponentes que suman menos de uno, uno y más de uno.
- Un **punto de silla**: en $x^2 - y^2$, la superficie sube en una dirección y baja en la perpendicular, y las curvas de nivel son hipérbolas que cambian de rama al cruzar el origen.

7.2 Práctica 2. Cálculo diferencial

Actividad	Órdenes
Derivada parcial	<code>diff(f(x,y), x);</code>
Gradiente	<code>load(vect)\$ express(grad(f));</code>
Hessiana	<code>hessian(f, [x,y]);</code>
Regla de la cadena	<code>diff(subst([x=g(t), y=h(t)], f), t);</code>

Actividad	Órdenes
Derivación implícita	<code>diff(F(x,y), x)/diff(F(x,y), y);</code> con el signo
Taylor	<code>taylor(f(x,y), [x,y], [a,b], 2);</code>

Los dos experimentos que fijan el tema 3:

- **Comprobar Schwarz** calculando las dos cruzadas de varias funciones, y buscar el contraejemplo clásico donde fallan porque no son continuas. Ver que la excepción existe y dónde está la hipótesis.
- **Medir el error de la aproximación lineal:** comparar $f(\mathbf{a} + \Delta)$ con la aproximación de primer y de segundo orden para incrementos cada vez mayores, y comprobar que el error de la lineal crece con el cuadrado del incremento y el de la cuadrática con el cubo.

```
f: 10*K^0.4 * L^0.6$
gradiente: [diff(f,K), diff(f,L)]$
subst([K=100, L=100], gradiente);
```

7.3 Práctica 3. Optimización sin restricciones

Actividad	Órdenes
Puntos críticos	<code>solve([diff(f,x)=0, diff(f,y)=0], [x,y]);</code>
Hessiana en un punto	<code>subst([x=a, y=b], hessian(f,[x,y]));</code>
Clasificarla	<code>eigenvalues(H);</code> o los menores con <code>determinant</code>
Comprobación visual	<code>contour_plot</code> alrededor del punto

El guion que se programa:

```
clasifica(f, [x,y]) := block([H, d1, d2],
  H: hessian(f, [x,y]),
  d1: H[1][1],
  d2: determinant(H),
  if d2 < 0 then "silla"
  elseif d2 > 0 and d1 > 0 then "minimo"
  elseif d2 > 0 and d1 < 0 then "maximo"
  else "no decide" )$
```

Lo que se comprueba, y es la lección de la práctica: **los casos en que devuelve «no decide»**. Con $x^4 + y^4$ y con $x^4 - y^4$ el guion se rinde en el origen, y hay que resolverlo mirando la función. Un criterio automático tiene un límite, y saber cuál es forma parte de usarlo.

Se pide además dibujar las curvas de nivel alrededor de cada punto crítico: en un mínimo son óvalos concéntricos, y en una silla son hipérbolas que cambian de rama. **La gráfica confirma la clasificación sin fiarse del determinante.**

7.4 Práctica 4. Optimización con restricciones

Actividad	Órdenes
Lagrangiano	<code>L: f - lambda*(g - b)\$</code>
Sistema	<code>solve([diff(L,x)=0, diff(L,y)=0, diff(L,lambda)=0], [x,y,lambda]);</code>
Evaluar candidatos	<code>subst(sol, f);</code>
Visualizar la tangencia	curvas de nivel de f más la restricción

El experimento visual es el que da sentido al método: dibujar varias curvas de nivel de f y encima la restricción, y ver que **en el óptimo son tangentes**. En cualquier otro punto de la restricción se cortan, y eso significa que moviéndose por ella se llega a un nivel mejor.

Y el experimento numérico que verifica el teorema del sobre:

1. Resolver el problema con el término independiente b .
2. Resolverlo con $b + \varepsilon$ para un ε pequeño.
3. Comprobar que $(V(b + \varepsilon) - V(b))/\varepsilon \approx \lambda$.

Nota 7.1 . `solve` devuelve **todas** las soluciones del sistema, incluidas las que no son extremos y las complejas. Hay que filtrarlas: descartar las que no cumplen el dominio del problema —cantidades negativas, por ejemplo— y evaluar la función objetivo en las que quedan. Aceptar la primera solución que devuelve el programa es el error más frecuente de esta práctica.

7.5 Práctica 5. Cálculo integral

Actividad	Órdenes
Integral iterada	<code>integrate(integrate(f, y, y1, y2), x, a, b);</code>
Área de un recinto	integrar la función constante 1
Valor medio	la integral dividida por el área
Dibujar el recinto	<code>implicit_plot</code> de las curvas que lo limitan

Lo que se pide comprobar:

- **El cambio de orden de integración** sobre el mismo recinto: los dos órdenes dan el mismo número, y uno de los dos puede ser incalculable. El caso de e^{y^2} es el ejemplo estándar.
- **El área como comprobación de los límites**: si integrar 1 no da el área que se ve en el dibujo, los límites están mal, y eso se detecta antes de calcular nada más.
- **Recuperar una función a partir de sus parciales**, comprobando primero la condición de Schwarz.

7.6 Sobre las memorias

Lo que se entrega por práctica:

1. Enunciado y planteamiento matemático.
2. Órdenes usadas, con su salida.
3. Gráficas cuando aporten, y comentadas.
4. Interpretación **económica** del resultado, no solo el número.

5. Comparación con lo que dice la teoría.

Los puntos 4 y 5 son los que se evalúan. Un multiplicador de Lagrange sin decir qué recurso mide y cuánto conviene pagar por él no es una respuesta; y una clasificación de un punto crítico sin comprobar si el óptimo es global está a medias.

Nota 7.2 . Y la precaución general: **el programa no comprueba las hipótesis**. Devuelve un punto crítico sin mirar si el dominio es abierto, aplica Lagrange sin verificar la regularidad, y da una integral sin avisar de que la función no era continua en el recinto. El resultado se contrasta siempre contra lo que la teoría permite.

El material de las prácticas sigue García Cabello, 2019 y Álvarez de Morales y Fortes, 2020 para el cálculo, y Barbolla et al., 2006 para la optimización.

Bibliografía

- Álvarez de Morales, M., & Fortes, M. Á. (2020). *Cálculo en varias variables para Economía y Administración y Dirección de Empresas*. Técnica Avicam.
- Barbolla, R., Cerdá, E., & Sanz, P. (2006). *Optimización. Cuestiones, ejercicios y aplicaciones a la Economía*. Prentice Hall.
- Besada, M., García, J., Mirás, M., & Vázquez, C. (2001). *Cálculo de varias variables. Cuestiones y ejercicios resueltos*. Prentice Hall.
- García, J., Martínez, C., & Rodríguez, M. (2010). *Optimización matemática aplicada a la Economía*. Godel Impresiones Digitales.
- García Cabello, J. (2019). *Matemáticas II para Economía y Empresa*. Avicam Fleming.
- Haeussler, E. F., & Paul, R. S. (2008). *Matemáticas para la administración, economía, ciencias sociales y de la vida*. Prentice Hall.
- Peris, J. E., & Carbonell, L. (1986). *Problemas de matemáticas para economistas*. Ariel.
- Stewart, J. (2002). *Cálculo multivariante* (4.^a ed.). Thomson Learning.
- Sydsaeter, K., & Hammond, P. (2012). *Matemáticas para el análisis económico*. Pearson.