



UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Introducción a las Operaciones Financieras

Temario de la asignatura

Ismael Sallami Moreno

Recursos Ingeniería Informática y Ade

Licencia

Este trabajo está bajo una Licencia Creative Commons BY-NC-ND 4.0.

Permisos: Se permite compartir, copiar y redistribuir el material en cualquier medio o formato.

Condiciones: Es necesario dar crédito adecuado, proporcionar un enlace a la licencia e indicar si se han realizado cambios. No se permite usar el material con fines comerciales ni distribuir material modificado.



Introducción a las Operaciones Financieras

Ismael Sallami Moreno

<https://elblogdeismael.github.io>

Índice general

1	Conceptos básicos	7
1.1	Capital financiero	7
1.2	Ley financiera	7
1.3	Operación financiera	8
1.4	Reserva matemática o saldo financiero	8
1.5	Características comerciales	9
1.6	Cómo se forman los tipos de interés	10
1.7	Ejercicios	10
2	Leyes simples	13
2.1	Capitalización simple	13
2.2	Descuento simple	14
2.3	Tantos equivalentes	15
2.4	Sustitución de capitales	15
2.5	Anexo: capitalización simple a tanto anticipado	16
2.6	Comparación de las leyes simples	16
2.7	Ejercicios	16
3	Operaciones a corto plazo	19
3.1	Descuento de efectos	19
3.2	Cuentas corrientes	20
3.3	Cuentas de crédito	21
3.4	Instrumentos del mercado monetario	22
3.5	Ejercicios	22
4	Leyes compuestas y continuas	25
4.1	Capitalización compuesta	25

4.2	Descuento compuesto	26
4.3	Tantos equivalentes	26
4.4	Tanto nominal y tanto efectivo	27
4.5	Capitalización continua	27
4.6	Comparación de los regímenes	28
4.7	Ejercicios	28
5	Valoración de rentas	31
5.1	Concepto y clasificación	31
5.2	Renta constante temporal pospagable	31
5.3	Renta prepagable	32
5.4	Renta diferida y anticipada	32
5.5	Rentas perpetuas	32
5.6	Rentas variables en progresión geométrica	33
5.7	Rentas variables en progresión aritmética	33
5.8	Rentas fraccionadas	33
5.9	Resumen	34
5.10	Ejercicios	34
6	Préstamos	37
6.1	Concepto y magnitudes	37
6.2	Sistema francés	37
6.3	Sistema de cuotas de amortización constantes	38
6.4	Sistema americano	39
6.5	Préstamos a tipo variable	39
6.6	Carencia	39
6.7	Cancelación anticipada	40
6.8	Tanto efectivo y coste amortizado	40
6.9	Comparación de los sistemas	40
6.10	Ejercicios	41

Conceptos básicos

Tema 1 del programa. Capital financiero, ley financiera y sus propiedades, operación financiera, reserva matemática, características comerciales, tantos efectivos y TAE, y cómo se forman los tipos de interés.

1.1 Capital financiero

Definición 1.1 (Capital financiero). Par ordenado (C, t) formado por una cuantía monetaria C y el instante t en que está disponible.

El instante forma parte del capital, no es un dato accesorio. Mil euros hoy y mil euros dentro de un año son capitales financieros distintos, y toda la asignatura consiste en saber cómo compararlos.

Principio	Enunciado
Preferencia por la liquidez	a igualdad de cuantía se prefiere el capital más próximo
Comparación	dos capitales en instantes distintos no se comparan directamente
Equivalencia	hay que llevarlos a un mismo instante con una ley financiera

1.2 Ley financiera

Definición 1.2 (Ley financiera de capitalización). Función $L(t, p)$ que da el valor en el instante p de un capital unitario disponible en t , con $p \geq t$.

Tipo	Sentido del movimiento	Nombre
Capitalización	del presente al futuro	valor final
Descuento	del futuro al presente	valor actual

Propiedad	Qué exige
Positividad	$L > 0$

Propiedad	Qué exige
Continuidad	pequeñas variaciones de tiempo, pequeñas de valor
Creciente en p	cuanto más lejos se lleva, mayor valor
Escindibilidad	capitalizar en dos tramos da lo mismo que en uno solo

Nota 1.1 . La escindibilidad es la propiedad que separa las dos familias del programa. La capitalización **compuesta** es escindible: llevar un capital de 0 a 2 años equivale a llevarlo de 0 a 1 y de 1 a 2. La **simple** no lo es, y por eso su uso se restringe a operaciones a corto plazo, donde la diferencia es pequeña y la sencillez compensa.

1.3 Operación financiera

Definición 1.3 . Intercambio de capitales no simultáneos entre dos partes, de forma que la prestación y la contraprestación resulten equivalentes según una ley financiera pactada.

Elemento	Qué es
Prestación	el conjunto de capitales que entrega una parte
Contraprestación	los que entrega la otra
Origen y final	instantes en que empieza y termina
Duración	diferencia entre los dos
Ley financiera	la que hace equivalentes las dos corrientes

$$\text{Valor de la prestación} = \text{Valor de la contraprestación}$$

Esa igualdad, planteada en un instante cualquiera, es la ecuación de equivalencia financiera, y de ella se despeja lo que se desconozca: un capital, un plazo o un tipo.

Clasificación	Tipos
Por la duración	a corto plazo (hasta un año) o a largo
Por el número de capitales	simples o compuestas
Por el sentido	de capitalización o de descuento
Por la certeza	ciertas o aleatorias

1.4 Reserva matemática o saldo financiero

Definición 1.4 . Valor en un instante intermedio s de la parte de la operación pendiente de ejecutar. Es la deuda viva en ese momento.

Se puede calcular de dos formas, que deben coincidir:

Método	Cómo
Retrospectivo	valor en s de lo entregado menos lo recibido hasta s
Prospectivo	valor en s de lo que queda por entregar

Nota 1.2 . Que los dos métodos coincidan **solo está garantizado si la ley es escindible**. Con capitalización compuesta siempre coinciden; con simple, no, y ahí está la razón técnica de que los préstamos se pacten siempre en régimen compuesto. La reserva matemática es además lo que se paga para cancelar anticipadamente.

1.5 Características comerciales

Son los gastos e ingresos adicionales que acompañan a la operación y que no forman parte del capital pactado.

Tipo	Quién lo soporta	Ejemplo
Bilaterales	afectan a las dos partes	ninguna en la práctica habitual
Unilaterales del prestamista	solo a él	gastos de estudio que no cobra
Unilaterales del prestatario	solo a él	comisión de apertura, tasación, notaría

Las **características comerciales son la razón de que exista el tanto efectivo**. El tipo nominal pactado no refleja lo que la operación cuesta de verdad cuando hay comisiones.

Tanto	Qué recoge
Nominal	el pactado, sin gastos
Efectivo del prestatario	incluye todo lo que él paga
Efectivo del prestamista	incluye todo lo que él recibe
TAE	el efectivo del prestatario, calculado según norma legal

Proposición 1.1 . Con características comerciales unilaterales del prestatario, el tanto efectivo que soporta es **mayor** que el nominal, y el que obtiene el prestamista es menor o igual que el efectivo del prestatario.

1.5.1 La TAE

Es el tanto efectivo anual calculado según la circular del Banco de España, e incluye los gastos inherentes a la operación. Su función es **permitir comparar productos** con estructuras de comisiones distintas.

Incluye	No incluye
Comisión de apertura	seguros no obligatorios
Intereses	notaría y registro, en algunos supuestos

Incluye	No incluye
Comisión de estudio	impuestos

Nota 1.3 . La TAE es comparable **solo entre operaciones del mismo plazo y del mismo tipo**. Dos préstamos con la misma TAE y plazos distintos no son equivalentes, y en operaciones a tipo variable la TAE se calcula suponiendo que el índice se mantiene, supuesto que casi nunca se cumple. Es una herramienta de comparación, no una predicción.

1.6 Cómo se forman los tipos de interés

$$i \approx r + \pi^e + \text{prima de riesgo} + \text{prima de liquidez} + \text{prima de plazo}$$

Componente	Qué remunera
Tipo real puro	la renuncia a consumir hoy
Expectativa de inflación	la pérdida de poder adquisitivo
Prima de riesgo	la posibilidad de impago
Prima de liquidez	la dificultad de recuperar el dinero antes
Prima de plazo	la incertidumbre de los plazos largos

Proposición 1.2 (Ecuación de Fisher).

$$(1 + i) = (1 + r)(1 + \pi^e) \quad \implies \quad i \approx r + \pi^e$$

La aproximación vale con inflaciones pequeñas. Con inflaciones altas hay que usar la expresión exacta, y la diferencia deja de ser despreciable.

1.6.1 El euríbor

Tipo de referencia del mercado interbancario del euro: la media de los tipos a los que las entidades declaran prestarse entre sí sin garantía, publicada a distintos plazos.

Plazo	Uso más frecuente
Una semana	operaciones muy cortas
Tres meses	referencia de mercado monetario
Doce meses	revisión de hipotecas a tipo variable

En un préstamo a tipo variable, el tipo aplicable es el euríbor del plazo pactado **más un diferencial** fijo, y se revisa con la periodicidad acordada.

1.7 Ejercicios

Ejercicio 1.7.1. Explicar por qué $(1000, 0)$ y $(1000, 1)$ no son el mismo capital financiero y qué hace falta para compararlos.

Solución 1.7.1. Porque el capital financiero es un par cuantía-instante, y los instantes difieren. Disponer de mil euros hoy permite invertirlos, consumirlos o cancelar una deuda; disponer de ellos dentro de un año no.

Para compararlos hace falta una ley financiera y un tipo: llevando el segundo al presente con un 4 %, su valor actual es $1000/1,04 = 961,54$, menor que 1000. La preferencia por la liquidez queda cuantificada.

Ejercicio 1.7.2. Un préstamo de 10 000 euros a un año pacta un tipo nominal del 6 % y una comisión de apertura del 1 %. ¿Cuál es el tanto efectivo del prestatario?

Solución 1.7.2. Recibe $10\,000 - 100 = 9900$ y devuelve $10\,000 \cdot 1,06 = 10\,600$. La ecuación de equivalencia es

$$9900(1 + i) = 10\,600 \implies i = 0,0707$$

Un 7,07 % frente al 6 % nominal. La comisión, que parecía un uno por ciento, encarece la operación en más de un punto porcentual.

Ejercicio 1.7.3. El tipo nominal de un depósito es del 3 % y la inflación esperada del 2,5 %. ¿Cuál es la rentabilidad real?

Solución 1.7.3. Por Fisher exacto, $1,03/1,025 = 1,00488$: un 0,49 %. La aproximación por diferencia daría 0,5 %, prácticamente igual porque las cifras son pequeñas.

Con una inflación del 10 % y un nominal del 12 %, el exacto sería $1,12/1,10 = 1,0182$, un 1,82 %, frente al 2 % de la aproximación. El error crece con la inflación.

Los conceptos básicos de la matemática financiera están desarrollados en Frías-Aceituno, 2025a, con su versión en inglés en Frías-Aceituno, 2025b.

Leyes simples

Tema 2 del programa. Capitalización simple a tanto vencido, descuento racional, descuento comercial, tantos equivalentes y sustitución de capitales.

2.1 Capitalización simple

Definición 2.1 . Los intereses se calculan siempre sobre el capital inicial y **no se acumulan** para generar nuevos intereses.

$$C_n = C_0 (1 + i n)$$

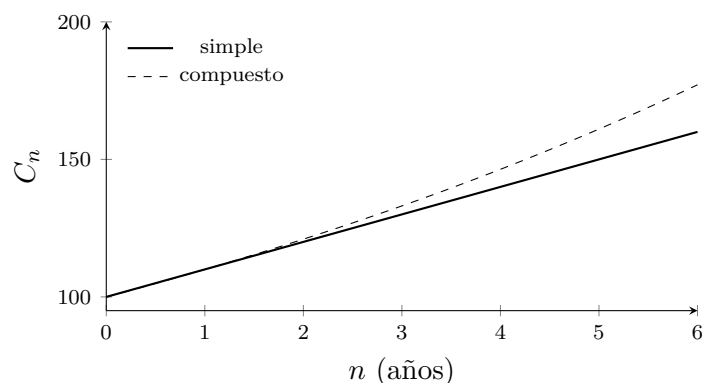
Magnitud	Expresión
Interés total	$I = C_0 i n$
Interés de cada periodo	$C_0 i$, constante
Capital final	$C_0(1 + i n)$

Los intereses periódicos son constantes, y esa es toda la diferencia con el régimen compuesto: el capital que genera intereses no crece.

Nota 2.1 . La capitalización simple **no es escindible**. Capitalizar de 0 a 2 años da $C_0(1 + 2i)$; hacerlo en dos tramos da $C_0(1 + i)(1 + i) = C_0(1 + 2i + i^2)$, que es mayor. La diferencia es el término i^2 , despreciable con plazos y tipos pequeños, y por eso el régimen simple se usa solo a corto plazo.

Y la comparación entre los dos regímenes:

Plazo	Cuál da mayor valor final
$n < 1$	simple
$n = 1$	coinciden
$n > 1$	compuesto



2.2 Descuento simple

Es la operación inversa: obtener hoy el valor de un capital futuro. Hay dos leyes distintas, y confundirlas es el error más frecuente del tema.

2.2.1 Descuento racional o matemático

Es el inverso exacto de la capitalización simple:

$$C_0 = \frac{C_n}{1 + i n}, \quad D_r = C_n - C_0 = \frac{C_n i n}{1 + i n}$$

El descuento se calcula sobre el **valor actual**, que es el capital que realmente se adelanta.

2.2.2 Descuento comercial

El descuento se calcula sobre el **valor nominal**:

$$C_0 = C_n (1 - d n), \quad D_c = C_n d n$$

Es el que usa la banca en el descuento de efectos, porque es más sencillo de calcular y le resulta más favorable.

Proposición 2.1 . Para el mismo tanto y plazo, $D_c > D_r$: el descuento comercial siempre es mayor. Y la ley comercial **no está definida** para $n \geq 1/d$, porque daría un valor actual negativo.

La relación entre los dos tantos, para que las dos leyes den el mismo resultado:

$$d = \frac{i}{1 + i n}, \quad i = \frac{d}{1 - d n}$$

Ejemplo 2.1 . Un efecto de 10 000 euros a 90 días con un tanto del 8 %, con año comercial de 360 días:

Racional: $C_0 = 10\,000 / (1 + 0,08 \cdot 90/360) = 10\,000 / 1,02 = 9803,92$, con descuento de 196,08.

Comercial: $C_0 = 10\,000 (1 - 0,08 \cdot 0,25) = 9800$, con descuento de 200.

La banca cobra 3,92 euros más por el mismo adelanto. El tanto de interés equivalente al 8 % de descuento comercial es $i = 0,08 / (1 - 0,02) = 0,0816$, un 8,16 %.

Nota 2.2 . El **año comercial** de 360 días frente al natural de 365 no es un detalle. Calcular intereses con 360 días en el denominador y cobrarlos por los días naturales transcurridos eleva el tipo efectivo en torno a un 1,4 %. Hay que comprobar siempre qué base de cálculo usa el enunciado o el contrato.

2.3 Tantos equivalentes

Al cambiar la unidad de medida del tiempo:

Régimen	Relación
Simple	$i_k = i/k$: los tantos son proporcionales
Compuesto	$(1 + i_k)^k = 1 + i$: son equivalentes, no proporcionales

En régimen simple, el tanto mensual es exactamente la doceava parte del anual, y esa proporcionalidad es lo que lo hace cómodo. En compuesto no ocurre, y de ahí la distinción entre tanto nominal y efectivo del tema 4.

2.4 Sustitución de capitales

Sustituir un conjunto de capitales por otro equivalente, planteando la ecuación de equivalencia en un instante de referencia.

Problema	Qué se busca
Vencimiento común	la fecha en que se pagaría un capital único dado
Vencimiento medio	la fecha de un capital único igual a la suma de los originales

Proposición 2.2 (Vencimiento medio, descuento comercial).

$$n^* = \frac{\sum C_j n_j}{\sum C_j}$$

Es la media aritmética de los vencimientos ponderada por las cuantías, y **no depende del tanto**.

Que no dependa del tanto es una propiedad muy cómoda y **exclusiva del descuento comercial**: con descuento racional el vencimiento medio sí depende de d .

Ejemplo 2.2 . Tres capitales: 2000 a 30 días, 3000 a 60 y 5000 a 90.

$$n^* = \frac{2000 \cdot 30 + 3000 \cdot 60 + 5000 \cdot 90}{10\,000} = \frac{60\,000 + 180\,000 + 450\,000}{10\,000} = 69 \text{ días}$$

Pagar 10 000 euros a los 69 días equivale a pagar los tres capitales en sus fechas. El resultado está más cerca de 90 que de 30 porque el capital mayor vence al final.

2.5 Anexo: capitalización simple a tanto anticipado

$$C_n = \frac{C_0}{1 - dn}$$

Es la inversa del descuento comercial. Se incluye por simetría formal y **apenas tiene uso práctico**: las operaciones reales de capitalización se pactan a tanto vencido.

2.6 Comparación de las leyes simples

Ley	Fórmula	Se calcula sobre	Uso real
Capitalización a tanto vencido	$C_0(1 + in)$	capital inicial	depósitos a corto
Descuento racional	$C_n/(1 + in)$	valor actual	teórico y comparativo
Descuento comercial	$C_n(1 - dn)$	valor nominal	descuento bancario de efectos
Capitalización a tanto anticipado	$C_0/(1 - dn)$	valor final	testimonial

2.7 Ejercicios

Ejercicio 2.7.1. Un capital de 5000 euros se coloca al 6 % simple durante 8 meses. Hallar el capital final y los intereses.

Solución 2.7.1. $n = 8/12 = 2/3$ años.

$$C_n = 5000(1 + 0,06 \cdot \frac{2}{3}) = 5000 \cdot 1,04 = 5200$$

Intereses: 200 euros. En régimen compuesto habrían sido $5000(1,06^{2/3} - 1) = 197,5$: algo menos, porque para plazos inferiores al año el régimen simple da más.

Ejercicio 2.7.2. Se descuenta un efecto de 20 000 euros a 120 días al 9 % de descuento comercial, con año de 360 días. ¿Cuánto se recibe y cuál es el tanto de interés equivalente?

Solución 2.7.2. $D_c = 20\,000 \cdot 0,09 \cdot \frac{120}{360} = 600$, así que se reciben 19 400.

El tanto de interés equivalente resuelve $19\,400(1 + i \cdot \frac{1}{3}) = 20\,000$, de donde $i = 0,0928$: un 9,28 %, por encima del 9 % nominal de descuento. Descontar al 9 % es pedir prestado al 9,28 %.

Ejercicio 2.7.3. Sustituir por un capital único, con vencimiento medio y descuento comercial, los capitales de 1000 a 60 días, 4000 a 120 y 5000 a 180.

Solución 2.7.3.

$$n^* = \frac{1000 \cdot 60 + 4000 \cdot 120 + 5000 \cdot 180}{10\,000} = \frac{60\,000 + 480\,000 + 900\,000}{10\,000} = 144 \text{ días}$$

Un pago único de 10 000 euros a los 144 días. Nótese que la respuesta no ha necesitado el tanto de descuento, que es la propiedad característica del vencimiento medio con ley comercial.

Las leyes financieras simples están desarrolladas en Frías-Aceituno, 2025a, con su versión en inglés en Frías-Aceituno, 2025b.

Operaciones a corto plazo

Tema 3 del programa. Las operaciones que se liquidan en régimen simple: descuento de efectos, cuentas corrientes, cuentas de crédito y los instrumentos del mercado monetario.

3.1 Descuento de efectos

Definición 3.1 . Operación por la que una entidad anticipa al tenedor de un efecto comercial su importe, antes del vencimiento, descontando intereses y comisiones y reservándose la acción de regreso si el librado no paga.

La entidad no compra el crédito, lo anticipa. Si el efecto resulta impagado, lo devuelve al cedente con los gastos, y de ahí que el riesgo real siga siendo del cliente.

Concepto	Cómo se calcula
Nominal	el importe del efecto, N
Descuento	$D = N d \frac{t}{360}$, con t en días
Comisión	un tanto por mil sobre el nominal, con mínimo por efecto
Otros gastos	correo, timbres, gastos de domiciliación
Efectivo	$E = N - D - \text{comisión} - \text{gastos}$

Nota 3.1 . La **comisión con mínimo** es lo que hace que descontar efectos pequeños sea desproporcionadamente caro. Con un mínimo de 6 euros por efecto, un efecto de 300 euros a 30 días soporta un coste que equivale a un tanto anual muy superior al tipo nominal pactado. Al comparar, se calcula siempre el tanto efectivo, nunca el nominal.

3.1.1 La remesa

Los efectos se presentan en grupo. El descuento de la remesa se puede liquidar efecto a efecto o, si el contrato lo permite, por el **método del vencimiento medio**: se sustituye la remesa por un solo capital igual a la suma de nominales, con el vencimiento medio del tema anterior.

Proposición 3.1 . Con descuento comercial y sin comisiones, liquidar efecto a efecto y liquidar por el vencimiento medio dan **el mismo descuento total**. La equivalencia se rompe en cuanto hay comisión con mínimo, porque esta no es proporcional al nominal.

Ejemplo 3.1 . Remesa de tres efectos al 10 % de descuento, comisión del 4 por mil con mínimo de 5 euros, año de 360 días:

Efecto	Nominal	Días	Descuento	Comisión
A	3 000	30	25,00	12,00
B	1 500	60	25,00	6,00
C	500	90	12,50	5,00
Total	5 000		62,50	23,00

El efectivo es $5000 - 62,50 - 23 = 4914,50$. En el efecto C la comisión llega al mínimo: 5 euros sobre 500 es un 1 %, frente al 0,4 % de los otros dos.

3.1.2 El tanto efectivo de la operación

Se obtiene de la ecuación de equivalencia entre lo que se recibe hoy y lo que se deja de cobrar al vencimiento:

$$E \left(1 + i \frac{t}{360} \right) = N \quad \Rightarrow \quad i = \frac{N - E}{E} \cdot \frac{360}{t}$$

Ese tanto es siempre mayor que el tipo de descuento nominal, por dos motivos que se suman: el descuento se calcula sobre el nominal y no sobre el efectivo, y las comisiones reducen lo recibido sin reducir lo debido.

3.2 Cuentas corrientes

Registro de los movimientos entre dos partes, con liquidación periódica de intereses. Se liquidan en régimen simple.

Método	Cómo funciona	Uso
Hamburgués o de saldos	se calcula el saldo tras cada movimiento y se capitalizan los días que dura	el que usa la banca
Directo	cada movimiento genera intereses desde su fecha hasta el cierre	histórico
Indirecto	cada movimiento genera intereses desde su fecha hasta una fecha de referencia	histórico

3.2.1 El método hamburgués

Definición 3.2 (Número comercial). Producto del saldo por los días que permanece: $N_c = S \cdot t$. Los intereses del periodo son $\sum N_c \cdot i/360$.

Columna	Contenido
Fecha valor	la que determina el cómputo de días, no la de la operación
Concepto	ingreso o disposición
Saldo	acumulado tras el movimiento
Días	hasta el movimiento siguiente o el cierre
Números	saldo por días

Nota 3.2 . La **fecha valor** no coincide con la fecha de la operación, y esa diferencia es retribución encubierta: en un abono suele ser posterior y en un cargo anterior, así que el saldo que genera intereses a favor del cliente es menor que el saldo contable. La normativa de transparencia limita los desfases aplicables, pero la distinción sigue siendo la primera cosa que hay que mirar en una liquidación.

Ejemplo 3.2 . Cuenta al 2 % anual, liquidación al final del trimestre, año de 360 días:

Fecha valor	Movimiento	Saldo	Días	Números
1-ene	+6 000	6 000	40	240 000
10-feb	−2 000	4 000	30	120 000
12-mar	+1 000	5 000	20	100 000
Suma de números				460 000

Intereses: $460\,000 \cdot 0,02/360 = 25,56$ euros.

3.3 Cuentas de crédito

La entidad pone un límite a disposición del cliente, que dispone de él según lo necesite y paga por lo dispuesto.

Concepto	Qué se paga	Sobre qué
Interés deudor	tipo pactado	los saldos dispuestos
Comisión de disponibilidad	tanto reducido	el saldo no dispuesto
Comisión de apertura	porcentaje único	el límite
Interés excedido	tipo penalizador	lo que supera el límite

La diferencia con un préstamo es la flexibilidad, y su precio es la comisión de disponibilidad. Se paga por tener el dinero disponible aunque no se use, así que una póliza infrautilizada es más cara que un préstamo del importe realmente necesario.

Nota 3.3 . La liquidación de una cuenta de crédito usa el método hamburgués con **tres columnas de números**: deudores, acreedores y excedidos, cada una con su tipo. El error clásico es aplicar el tipo deudor al tramo excedido; el excedido lleva su propio tipo, muy superior, y a veces una comisión sobre el mayor saldo excedido del periodo.

3.4 Instrumentos del mercado monetario

Instrumento	Emisor	Forma de rendimiento
Letra del Tesoro	Estado	al descuento: se compra bajo par y se amortiza a la par
Pagaré de empresa	empresas	al descuento
Repo	entidades	compraventa con pacto de recompra
Depósito interbancario	entidades	interés explícito

3.4.1 Letras del Tesoro

Se emiten a 3, 6, 9 y 12 meses. Al ser emitidas al descuento, el rendimiento es la diferencia entre precio de compra y nominal.

$$\text{Rentabilidad} = \frac{N - P}{P} \cdot \frac{360}{t} \quad (t \leq 376), \quad \left(\frac{N}{P}\right)^{365/t} - 1 \quad (t > 376)$$

El Tesoro usa régimen simple para plazos hasta 376 días y compuesto por encima, y esa convención es la que hay que respetar al comparar con otros productos.

3.4.2 Operaciones repo

Definición 3.3 . Compraventa de un activo con pacto de recompra en fecha y precio fijados de antemano. El rendimiento es la diferencia entre los dos precios.

Económicamente es un préstamo con garantía: quien vende obtiene liquidez y quien compra obtiene un activo como colateral. **Por eso su tipo es inferior al de un depósito sin garantía del mismo plazo**, y la diferencia entre los dos mide la percepción de riesgo del mercado.

3.5 Ejercicios

Ejercicio 3.5.1. Se descuenta un efecto de 6000 euros a 45 días al 11 % de descuento, con una comisión del 3 por mil y 4 euros de gastos. Año de 360 días. Hallar el efectivo y el tanto efectivo de la operación.

Solución 3.5.1. $D = 6000 \cdot 0,11 \cdot 45/360 = 82,50$. Comisión: $6000 \cdot 0,003 = 18$.

$E = 6000 - 82,50 - 18 - 4 = 5895,50$.

$$i = \frac{6000 - 5895,50}{5895,50} \cdot \frac{360}{45} = 0,1418$$

Un 14,18 % frente al 11 % nominal. Los tres puntos de diferencia salen de la comisión, de los gastos fijos y de que el descuento se calcula sobre el nominal.

Ejercicio 3.5.2. Una cuenta de crédito de 50 000 euros de límite cobra un 7 % deudor, un 0,5 % de comisión de disponibilidad sobre el saldo medio no dispuesto y un 25 % de excedido. Durante

un trimestre de 90 días el saldo medio dispuesto es de 20 000 euros y hubo 10 días con 4000 euros de excedido. Estimar el coste.

Solución 3.5.2. Intereses deudores: $20\,000 \cdot 0,07 \cdot 90/360 = 350$.

Disponibilidad: el no dispuesto medio es $50\,000 - 20\,000 = 30\,000$, así que $30\,000 \cdot 0,005 \cdot 90/360 = 37,50$.

Excedido: $4000 \cdot 0,25 \cdot 10/360 = 27,78$.

Total: 415,28 euros. Los diez días de excedido cuestan casi tanto como el trimestre entero de comisión de disponibilidad, que es exactamente lo que la penalización busca.

Ejercicio 3.5.3. Una letra del Tesoro a 12 meses (365 días) de 1000 euros de nominal se adjudica a 972 euros. Hallar su rentabilidad.

Solución 3.5.3. El plazo no supera los 376 días, así que se aplica régimen simple:

$$i = \frac{1000 - 972}{972} \cdot \frac{360}{365} = 0,0284$$

Un 2,84 %. Nótese que la rentabilidad se calcula sobre el precio pagado, no sobre el nominal: dividir 28 entre 1000 daría un 2,8 %, algo menos, y es el error habitual.

Las operaciones financieras a corto plazo están desarrolladas en Frías-Aceituno, 2025a, con su versión en inglés en Frías-Aceituno, 2025b.

Leyes compuestas y continuas

Tema 4 del programa. Capitalización y descuento compuestos, tantos equivalentes, tanto nominal y efectivo, capitalización fraccionada y capitalización continua.

4.1 Capitalización compuesta

Definición 4.1 . Los intereses de cada periodo se acumulan al capital y generan a su vez intereses en los periodos siguientes.

$$C_n = C_0 (1 + i)^n$$

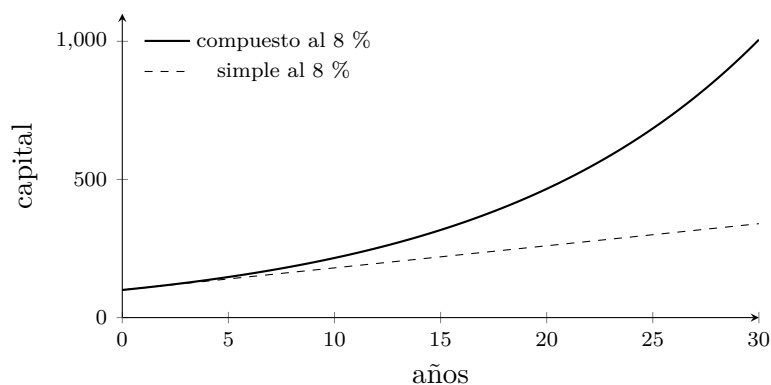
Magnitud	Expresión
Capital final	$C_0(1 + i)^n$
Intereses totales	$C_0[(1 + i)^n - 1]$
Intereses del periodo k	$C_0(1 + i)^{k-1} i$, crecientes
Tanto	$i = \sqrt[n]{C_n/C_0} - 1$
Plazo	$n = \frac{\ln(C_n/C_0)}{\ln(1 + i)}$

Proposición 4.1 . La capitalización compuesta **es escindible**: para cualesquiera p y q ,

$$(1 + i)^{p+q} = (1 + i)^p (1 + i)^q$$

Por eso el valor de un capital no depende de en cuántos tramos se calcule, y por eso los métodos retrospectivo y prospectivo de la reserva matemática coinciden.

La escindibilidad es la razón técnica de que todas las operaciones a largo plazo se pacten en régimen compuesto. Sin ella, un préstamo daría una deuda pendiente distinta según cómo se troceara el cálculo.



La separación entre las dos curvas es el efecto acumulativo. **A treinta años el compuesto multiplica por diez y el simple por menos de tres.**

Nota 4.1 . La **regla del 72** da el plazo aproximado de duplicación: $n \approx 72/i$ con el tipo en tanto por ciento. Al 8 % son unos nueve años, y el valor exacto es $\ln 2 / \ln 1,08 = 9,01$. Es una aproximación cómoda para tipos entre el 4 y el 12 %.

4.2 Descuento compuesto

Es la operación inversa, y también tiene versión racional y comercial.

Ley	Valor actual	Observación
Descuento racional	$C_0 = C_n(1+i)^{-n}$	inverso exacto de la capitalización compuesta
Descuento comercial	$C_0 = C_n(1-d)^n$	tanto de descuento aplicado periodo a periodo

$$d = \frac{i}{1+i}, \quad i = \frac{d}{1-d}$$

En régimen compuesto se usa casi siempre el racional, que es el que da el valor actual de la matemática financiera y el que aparece en el valor actual neto.

4.3 Tantos equivalentes

Definición 4.2 . Dos tantos referidos a periodos distintos son equivalentes si producen el mismo capital final para el mismo capital inicial y el mismo plazo.

$$(1+i) = (1+i_k)^k \quad \implies \quad i_k = (1+i)^{1/k} - 1$$

donde k es el número de subperiodos del año: 2 semestres, 4 trimestres, 12 meses.

Proposición 4.2 . En régimen compuesto los tantos equivalentes **no son proporcionales**: $i_k < i/k$. Es consecuencia directa de que $(1+x)^k > 1+kx$ para $x > 0$ y $k > 1$.

Anual	Semestral equivalente	Mensual equivalente	$i/12$
6	2,956	0,487	0,500
12	5,830	0,949	1,000
24	11,355	1,809	2,000

(Valores en tanto por ciento.) La diferencia entre la columna mensual equivalente y la proporcional crece con el tipo, y es lo que separa el tanto efectivo del nominal.

4.4 Tanto nominal y tanto efectivo

Definición 4.3 (Tanto nominal J_k). Tanto anual que se fracciona **proporcionalmente**: el tanto del subperiodo es $i_k = J_k/k$. No es un tipo efectivo; es una convención de cotización.

$$i = \left(1 + \frac{J_k}{k}\right)^k - 1, \quad J_k = k[(1+i)^{1/k} - 1]$$

Ejemplo 4.1 . Un depósito ofrece un 12 % nominal con abono mensual de intereses. El tanto mensual es $0,12/12 = 0,01$, un 1 %, y el efectivo anual

$$i = 1,01^{12} - 1 = 0,12683$$

Un 12,68 %, no un 12 %. La diferencia crece con la frecuencia de abono, y es la razón de que la publicidad de los productos deba expresar la TAE.

Frecuencia k	Un J_k del 12, % da un efectivo de
1 (anual)	12,0000
2 (semestral)	12,3600
4 (trimestral)	12,5509
12 (mensual)	12,6825
365 (diaria)	12,7475
∞ (continua)	12,7497

El efectivo crece con la frecuencia pero converge, y ese límite es la capitalización continua.

4.5 Capitalización continua

Definición 4.4 (Tanto instantáneo).

$$\delta = \lim_{k \rightarrow \infty} J_k = \ln(1+i), \quad C_n = C_0 e^{\delta n}$$

Demostración 4.1 . Partiendo del efectivo obtenido al fraccionar,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\delta}{k}\right)^{kn} = e^{\delta n}$$

por la definición del número e . Igualando $e^\delta = 1+i$ se obtiene $\delta = \ln(1+i)$.

Relación	Expresión
De efectivo a instantáneo	$\delta = \ln(1 + i)$
De instantáneo a efectivo	$i = e^\delta - 1$
Descuento continuo	$C_0 = C_n e^{-\delta n}$

La ventaja del tanto instantáneo es que se suma. Con capitalización continua, el rendimiento de dos periodos consecutivos es la suma de los rendimientos, no su producto compuesto, y por eso es el régimen que usan los modelos de valoración de activos.

Nota 4.2. Aunque ningún contrato liquide intereses de forma continua, δ aparece constantemente en la práctica: los rendimientos logarítmicos de un activo, $\ln(P_t/P_{t-1})$, son tantos instantáneos, y son aditivos en el tiempo, cosa que los rendimientos simples no son.

4.6 Comparación de los regímenes

Régimen	Ley	Escindible	Uso
Simple	$C_0(1 + in)$	no	corto plazo, descuento de efectos
Compuesto	$C_0(1 + i)^n$	sí	préstamos, depósitos, valoración
Fraccionado	$C_0(1 + J_k/k)^{kn}$	sí	liquidaciones periódicas
Continuo	$C_0 e^{\delta n}$	sí	modelos financieros

4.7 Ejercicios

Ejercicio 4.7.1. Un capital de 8000 euros se coloca al 5 % compuesto durante 7 años. Hallar el capital final y compararlo con el régimen simple.

Solución 4.7.1.

$$C_7 = 8000 \cdot 1,05^7 = 8000 \cdot 1,40710 = 11\,256,80$$

En simple: $8000(1 + 0,05 \cdot 7) = 10\,800$. La diferencia, 456,80 euros, son los intereses de los intereses.

Ejercicio 4.7.2. ¿Cuántos años tarda un capital en triplicarse al 6 % compuesto?

Solución 4.7.2.

$$n = \frac{\ln 3}{\ln 1,06} = \frac{1,09861}{0,05827} = 18,85 \text{ años}$$

Casi diecinueve años. Nótese que duplicarse cuesta $\ln 2 / \ln 1,06 = 11,90$ años: triplicar no cuesta el doble que duplicar, porque el crecimiento es exponencial.

Ejercicio 4.7.3. Un préstamo cotiza un tanto nominal del 9 % con liquidación trimestral. Hallar el tanto efectivo anual y el tanto instantáneo.

Solución 4.7.3. $i_4 = 0,09/4 = 0,0225$, así que

$$i = 1,0225^4 - 1 = 0,09308$$

Un 9,31 % efectivo. El instantáneo es $\delta = \ln(1,09308) = 0,08903$, un 8,90 %, por debajo del nominal, que es lo esperable: el instantáneo es el menor de los tres.

Ejercicio 4.7.4. Dos productos: A ofrece un 7,2 % nominal con abono mensual y B un 7,35 % efectivo anual. ¿Cuál es mejor?

Solución 4.7.4. A tiene un efectivo de $(1 + 0,072/12)^{12} - 1 = 1,006^{12} - 1 = 0,07442$, un 7,44 %.

A es mejor, pese a que su cifra anunciada, 7,2, es menor que la de B. Comparar nominales con efectivos es el error que la obligación de publicar la TAE viene a evitar.

Las leyes financieras compuestas y continuas están desarrolladas en Frías-Aceituno, 2025a, con su versión en inglés en Frías-Aceituno, 2025b.

Valoración de rentas

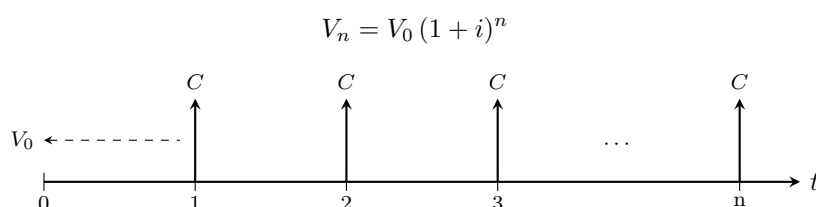
Tema 5 del programa. Rentas constantes, variables en progresión geométrica y aritmética, temporales y perpetuas, pospagables y prepagables, inmediatas y diferidas, y fraccionadas.

5.1 Concepto y clasificación

Definición 5.1 (Renta). Sucesión de capitales financieros con vencimientos regulares. Valorarla es sustituirla por un capital único equivalente en un instante dado.

Criterio	Tipos
Cuantía	constante o variable
Duración	temporal (n términos) o perpetua
Vencimiento	pospagable (final de periodo) o prepagable (principio)
Momento de valoración	inmediata, diferida o anticipada
Frecuencia	anual o fraccionada

Valor	Qué es
Valor actual V_0	valor de todos los términos en el origen
Valor final V_n	valor de todos los términos al vencimiento del último



5.2 Renta constante temporal pospagable

Proposición 5.1 . El valor actual de n términos de cuantía 1, al tanto i , es

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

y el valor final

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Demostración 5.1 . El valor actual es la suma de los valores actuales de cada término:

$$a_{\overline{n}|i} = \sum_{k=1}^n (1+i)^{-k}$$

Es una progresión geométrica de razón $v = (1+i)^{-1}$ y primer término v . Su suma es

$$v \frac{1-v^n}{1-v} = \frac{(1+i)^{-1}(1-(1+i)^{-n})}{1-(1+i)^{-1}} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

tras multiplicar numerador y denominador por $(1+i)$.

Para una renta de cuantía C basta multiplicar: $V_0 = C a_{\overline{n}|i}$.

Nota 5.1 . $a_{\overline{n}|i}$ **crece con n pero está acotado** por $1/i$. Añadir términos al final de una renta larga apenas cambia su valor actual: al 5 %, pasar de 30 a 40 términos sube el valor actual de 15,37 a 17,16, un 12 %, mientras que la renta se ha alargado un tercio. Es la razón de que el valor de un activo esté dominado por sus flujos próximos.

5.3 Renta prepagable

Los términos vencen al principio de cada periodo, así que todos se adelantan un periodo:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i} (1+i), \quad \ddot{s}_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i} (1+i)$$

Multiplicar por $(1+i)$ es todo el cambio, y conviene recordarlo así en lugar de aprender una fórmula nueva. El alquiler es el ejemplo típico de renta prepagable; la cuota de un préstamo, de renta pospagable.

5.4 Renta diferida y anticipada

Caso	Valor en el origen
Diferida d periodos	$V_0 = a_{\overline{n} i} (1+i)^{-d}$
Anticipada h periodos	$V_0 = a_{\overline{n} i} (1+i)^h$

El diferimiento se resuelve valorando la renta en el instante anterior a su primer término y trasladando ese valor. **No hay fórmula nueva: hay un traslado.**

5.5 Rentas perpetuas

$$a_{\infty|i} = \frac{1}{i}, \quad \ddot{a}_{\infty|i} = \frac{1+i}{i}$$

Proposición 5.2 . El valor final de una renta perpetua **no existe**: no hay último término al que trasladar los capitales.

Aparecen en la valoración de acciones con dividendo estable y en la deuda perpetua. Su sencillez las hace útiles como aproximación de rentas muy largas.

5.6 Rentas variables en progresión geométrica

Los términos son $C, Cq, Cq^2, \dots, Cq^{n-1}$.

Proposición 5.3 .

$$V_0 = C \frac{1 - q^n(1+i)^{-n}}{1+i-q} \quad (q \neq 1+i), \quad V_0 = \frac{nC}{1+i} \quad (q = 1+i)$$

El caso $q = 1 + i$ es el que se olvida, y aplicar la fórmula general en él da una división por cero. Sucede cuando el crecimiento de los términos iguala al tipo de valoración.

Para la perpetua, con $q < 1 + i$:

$$V_0 = \frac{C}{1+i-q}$$

Nota 5.2 . Esta última expresión es el **modelo de Gordon** de valoración de acciones. Escrito con la tasa de crecimiento $g = q - 1$ queda $V_0 = C/(i - g)$, y muestra por qué el modelo es tan sensible: si g se acerca a i , el valor tiende a infinito. Una diferencia de dos décimas en la estimación del crecimiento puede duplicar la valoración.

5.7 Rentas variables en progresión aritmética

Los términos son $C, C + h, C + 2h, \dots, C + (n-1)h$.

$$V_0 = \left(C + \frac{h}{i} + hn\right)a_{\overline{n}|i} - \frac{hn}{i}$$

Y la perpetua, con $h > 0$:

$$V_0 = \frac{C}{i} + \frac{h}{i^2}$$

El segundo sumando es lo que aporta el crecimiento, y depende de i^2 : con tipos bajos, un crecimiento aritmético pequeño tiene un peso desproporcionado en el valor.

5.8 Rentas fraccionadas

Los términos vencen k veces por periodo. Se resuelve pasando el tanto a la frecuencia de los términos:

Paso	Qué se hace
1	obtener el tanto equivalente $i_k = (1+i)^{1/k} - 1$

Paso	Qué se hace
2	contar los términos: $n \cdot k$
3	aplicar la fórmula habitual con i_k y nk

Nota 5.3. El error frecuente es usar i/k en lugar de $(1+i)^{1/k} - 1$. Con un 12 % anual y términos mensuales, i/k da un 1 % frente al 0,9489 % de $(1+i)^{1/12} - 1$: sobre una renta de 240 términos la diferencia en el valor actual supera el 4 %. Salvo que el enunciado dé un **tanto nominal**, en cuyo caso J_k/k sí es el tanto del subperiodo por definición.

5.9 Resumen

Renta	Valor actual
Constante temporal pospagable	$C a_{\overline{n} i}$
Constante temporal prepagable	$C a_{\overline{n} i}(1+i)$
Constante perpetua pospagable	C/i
Geométrica temporal	$C \frac{1 - q^n(1+i)^{-n}}{1+i-q}$
Geométrica perpetua	$C/(1+i-q)$
Aritmética perpetua	$C/i + h/i^2$

5.10 Ejercicios

Ejercicio 5.10.1. Hallar el valor actual y el valor final de una renta de 3000 euros anuales durante 12 años, pospagable, al 6 %.

Solución 5.10.1.

$$a_{\overline{12}|0,06} = \frac{1 - 1,06^{-12}}{0,06} = 8,38384$$

$$V_0 = 3000 \cdot 8,38384 = 25\,151,52.$$

$$s_{\overline{12}|0,06} = \frac{1,06^{12} - 1}{0,06} = 16,86994$$

$$V_{12} = 3000 \cdot 16,86994 = 50\,609,82. \text{ Comprobación: } 25\,151,52 \cdot 1,06^{12} = 50\,609,82.$$

Ejercicio 5.10.2. Un alquiler de 700 euros mensuales se paga por adelantado durante 5 años. Valorarlo al inicio, con un tanto efectivo anual del 4 %.

Solución 5.10.2. Tanto mensual equivalente: $i_{12} = 1,04^{1/12} - 1 = 0,0032737$. Términos: 60.

$$a_{\overline{60}|} = \frac{1 - 1,0032737^{-60}}{0,0032737} = 54,3305$$

$$\text{Prepagable: } 54,3305 \cdot 1,0032737 = 54,5083.$$

$$V_0 = 700 \cdot 54,5083 = 38\,155,81 \text{ euros.}$$

Ejercicio 5.10.3. Una acción reparte un dividendo de 2 euros que se espera crezca un 3 % anual indefinidamente. Con una rentabilidad exigida del 8 %, hallar su valor teórico y ver qué ocurre si el crecimiento esperado sube al 6 %.

Solución 5.10.3.

$$V_0 = \frac{2}{0,08 - 0,03} = 40 \text{ euros}$$

Con $g = 0,06$: $V_0 = 2/0,02 = 100$ euros. Duplicar la estimación de crecimiento multiplica el valor por 2,5. El modelo es aritméticamente correcto y prácticamente muy frágil, y por eso solo se usa con crecimientos claramente inferiores a la rentabilidad exigida.

Ejercicio 5.10.4. Se quiere disponer de 60 000 euros dentro de 15 años. ¿Qué imposición anual pospagable hace falta al 5 %?

Solución 5.10.4.

$$s_{15|0,05} = \frac{1,05^{15} - 1}{0,05} = 21,57856$$

$$C = \frac{60\,000}{21,57856} = 2780,47 \text{ euros anuales}$$

Se aportan $15 \cdot 2780,47 = 41\,707$ euros y se reciben 60 000: los 18 293 restantes son intereses.

La valoración de rentas está desarrollada en Frías-Aceituno, 2025a, con su versión en inglés en Frías-Aceituno, 2025b.

Préstamos

Tema 6 del programa. Sistemas de amortización, cuadro de amortización, préstamos a tipo variable, carencia, cancelación anticipada y tanto efectivo.

6.1 Concepto y magnitudes

Definición 6.1 . Operación financiera en la que el prestamista entrega un capital C_0 y el prestatario lo devuelve mediante una sucesión de pagos, llamados términos amortizativos, que comprenden intereses y devolución de principal.

Símbolo	Magnitud
C_0	capital prestado
a_s	término amortizativo del periodo s
I_s	cuota de interés
A_s	cuota de amortización
C_s	capital vivo tras el pago s
M_s	total amortizado hasta s

Relación	Expresión
Descomposición del término	$a_s = I_s + A_s$
Interés del periodo	$I_s = C_{s-1} i$
Capital vivo	$C_s = C_{s-1} - A_s$
Suma de amortizaciones	$\sum_{s=1}^n A_s = C_0$
Total amortizado	$M_s = C_0 - C_s$

Nota 6.1 . Las cuatro relaciones anteriores valen para **cualquier** sistema de amortización, y con ellas se construye el cuadro sin recordar ninguna fórmula cerrada. La comprobación que detecta casi todos los errores: el capital vivo tras el último pago debe ser exactamente cero, y la suma de la columna de amortizaciones debe dar C_0 .

6.2 Sistema francés

Es el de término amortizativo constante, y el que usan casi todos los préstamos hipotecarios y de consumo.

Proposición 6.1 .

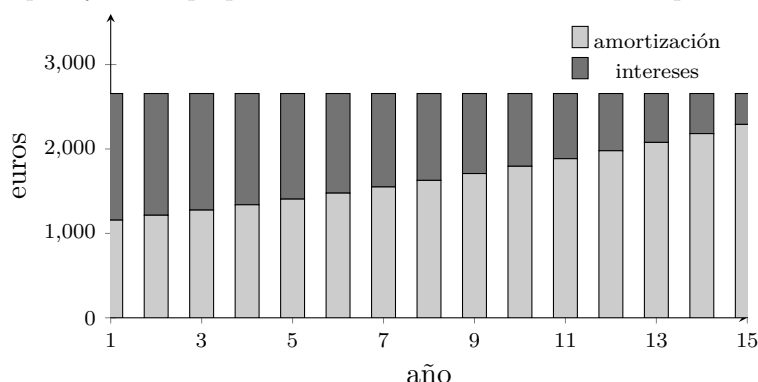
$$a = \frac{C_0}{a_{\overline{n}|i}} = C_0 \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}}$$

Demostración 6.1 . La ecuación de equivalencia iguala el capital prestado al valor actual de los términos. Siendo estos constantes, forman una renta constante temporal pospagable, así que $C_0 = a a_{\overline{n}|i}$. Despejando se obtiene la expresión.

Magnitud	Expresión
Capital vivo	$C_s = a a_{\overline{n-s} i}$
Cuota de amortización	$A_s = A_1(1+i)^{s-1}$
Primera cuota	$A_1 = a - C_0 i$
Total amortizado	$M_s = A_1 s_{\overline{s} i}$

Proposición 6.2 . Las cuotas de amortización del sistema francés crecen en **progresión geométrica de razón** $(1+i)$, y las de interés decrecen.

El capital vivo se calcula siempre por el método prospectivo, valorando los términos que quedan: es más rápido y menos propenso a arrastrar errores de redondeo que ir restando fila a fila.



Préstamo de 30 000 euros a 15 años al 5 %. El término total es constante, pero su composición se invierte: **los primeros años se paga sobre todo interés**, y esa es la razón de que amortizar anticipadamente sea mucho más rentable al principio.

6.3 Sistema de cuotas de amortización constantes

También llamado italiano o de cuota fija de capital.

$$A_s = \frac{C_0}{n}, \quad a_s = \frac{C_0}{n} + C_{s-1} i$$

Rasgo	Comportamiento
Cuota de amortización	constante
Cuota de interés	decreciente en progresión aritmética
Término amortizativo	decreciente
Capital vivo	$C_s = C_0(1 - \frac{s}{n})$

Rasgo	Comportamiento
-------	----------------

Proposición 6.3 . Frente al sistema francés del mismo capital, plazo y tipo, el sistema de cuotas constantes paga **menos intereses en total** pero exige términos iniciales mayores.

Menos intereses totales no significa mejor: amortiza antes, así que el capital vivo es menor en todo momento y devenga menos. La comparación correcta es de tanto efectivo, y ahí los dos coinciden si no hay comisiones.

6.4 Sistema americano

El prestatario paga solo intereses durante toda la vida del préstamo y devuelve el principal íntegro al vencimiento.

$$a_s = C_0 i \quad (s < n), \quad a_n = C_0 i + C_0$$

Variante con fondo de amortización: además de los intereses, se imponen cantidades en un depósito al tanto i' para reunir C_0 al final. Si $i' < i$, el coste real supera al del préstamo francés.

6.5 Préstamos a tipo variable

El tipo se revisa periódicamente según un índice de referencia más un diferencial.

Paso de la revisión	Qué se hace
1	tomar el capital vivo en la fecha de revisión
2	tomar el nuevo tipo: índice + diferencial
3	tomar el plazo pendiente
4	recalcular el término con la fórmula del francés

Nota 6.2 . La revisión **no rehace el préstamo**: parte del capital vivo alcanzado, que ya no depende del tipo futuro. Por eso una subida de tipos golpea más a un préstamo joven, donde el capital vivo es casi todo el prestado, que a uno que lleva veinte años pagándose.

6.6 Carencia

Tipo	Qué se paga	Efecto sobre la deuda
Carencia de amortización (parcial)	solo intereses	el capital vivo no cambia
Carencia total	nada	los intereses se capitalizan y la deuda crece

Proposición 6.4 . Tras d periodos de carencia total, la deuda al empezar la amortización es $C_0(1+i)^d$, y el término amortizativo se calcula sobre esa cifra con el plazo restante.

La carencia total no aplaza el coste: lo aumenta. Dos años de carencia al 5 % elevan la deuda un 10,25 %, y esa diferencia se arrastra durante toda la vida del préstamo.

6.7 Cancelación anticipada

El importe a pagar es el **capital vivo** en la fecha, más la comisión de cancelación si el contrato la prevé.

$$\text{Coste} = C_s + \text{comisión} \cdot C_s$$

Modalidad	Efecto
Reducción de cuota	mismo plazo, término menor
Reducción de plazo	mismo término, menos periodos

La reducción de plazo ahorra más intereses, porque elimina los periodos finales enteros en lugar de rebajar todos los términos. La reducción de cuota mejora la liquidez mensual.

6.8 Tanto efectivo y coste amortizado

Con comisiones y gastos, el tanto efectivo del prestatario resuelve

$$C_0 - \text{gastos iniciales} = \sum_{s=1}^n \frac{a_s}{(1 + i^*)^s}$$

y se despeja numéricamente. **La TAE es ese i^*** , calculado con los conceptos que la normativa incluye.

Nota 6.3 . La misma ecuación, resuelta desde la perspectiva del prestamista, es el **tipo de interés efectivo** del coste amortizado que exige la normativa contable: el valor en libros de un préstamo es el valor actual de sus flujos pendientes descontados a ese tipo, y los ingresos financieros se reconocen aplicándolo al valor en libros de cada periodo. Es la misma matemática con otro nombre.

6.9 Comparación de los sistemas

Sistema	Término	Intereses totales	Uso
Francés	constante	intermedios	hipotecas, consumo
Cuotas constantes	decreciente	menores	financiación empresarial
Americano	intereses y principal al final	mayores	emisiones de deuda
Con carencia	escalonado	mayores	promoción, estudios

6.10 Ejercicios

Ejercicio 6.10.1. Préstamo de 20 000 euros a 5 años al 6 % anual, sistema francés. Calcular el término y las tres primeras filas del cuadro.

Solución 6.10.1. $a_{\overline{5}|0,06} = 4,21236$, así que $a = 20\,000/4,21236 = 4747,93$.

s	a_s	I_s	A_s	C_s
0				20 000,00
1	4747,93	1200,00	3547,93	16 452,07
2	4747,93	987,12	3760,81	12 691,26
3	4747,93	761,48	3986,45	8704,81

Comprobación de la razón geométrica: $3760,81/3547,93 = 1,06$, y $3986,45/3760,81 = 1,06$.

Ejercicio 6.10.2. Con el préstamo anterior, hallar el capital vivo tras el tercer pago por el método prospectivo y el total de intereses pagados en los cinco años.

Solución 6.10.2.

$$C_3 = 4747,93 \cdot a_{\overline{2}|0,06} = 4747,93 \cdot 1,83339 = 8704,81$$

Coincide con el cuadro.

Intereses totales: $5 \cdot 4747,93 - 20\,000 = 23\,739,65 - 20\,000 = 3739,65$ euros.

Ejercicio 6.10.3. El mismo préstamo por el sistema de cuotas de amortización constantes. Comparar el primer término y los intereses totales.

Solución 6.10.3. $A_s = 4000$ fijos. Primer término: $4000 + 1200 = 5200$, frente a los 4747,93 del francés.

Intereses: $1200 + 960 + 720 + 480 + 240 = 3600$ euros, frente a 3739,65. Se pagan 139,65 euros menos porque el capital se devuelve antes; a cambio el primer año se paga un 9,5 % más.

Ejercicio 6.10.4. Un préstamo de 100 000 euros a 20 años al 4 % tiene una comisión de apertura del 1 % y 600 euros de gastos de tasación y notaría. Plantear el cálculo de la TAE.

Solución 6.10.4. Término anual: $a_{\overline{20}|0,04} = 13,59033$, así que $a = 100\,000/13,59033 = 7358,18$.

Lo recibido neto es $100\,000 - 1000 - 600 = 98\,400$, y la ecuación es

$$98\,400 = 7358,18 \cdot a_{\overline{20}|i^*}$$

de donde $a_{\overline{20}|i^*} = 13,37287$ y, resolviendo numéricamente, $i^* = 0,04168$: una TAE del 4,17 % frente al 4 % nominal.

Los 1600 euros iniciales, que son un 1,6 % del capital, encarecen el préstamo en solo 17 puntos básicos anuales porque se reparten entre veinte años. En un préstamo a dos años el mismo importe habría subido el coste más de un punto.

Ejercicio 6.10.5. Un préstamo de 50 000 euros a 10 años al 5 % tiene dos años de carencia total. ¿Cuál es el término de los ocho años restantes?

Solución 6.10.5. Deuda al final de la carencia: $50\,000 \cdot 1,05^2 = 55\,125$.

$a_{\overline{8}|0,05} = 6,46321$, así que $a = 55\,125/6,46321 = 8529,31$.

Sin carencia el término habría sido $50\,000/7,72173 = 6475,22$ durante diez años. La carencia sube el término un 31,7 % y los desembolsos totales pasan de 64 752 a 68 234 euros.

Los sistemas de amortización de préstamos están desarrollados en Frías-Aceituno, 2025a, con su versión en inglés en Frías-Aceituno, 2025b.

Bibliografía

Frías-Aceituno, J. V. (2025a). *Introducción a las Operaciones Financieras*. Técnica Avicam.
Frías-Aceituno, J. V. (2025b). *Introduction to Financial Operations*. Técnica Avicam.