



UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Métodos Cuantitativos

Temario de la asignatura

Ismael Sallami Moreno

Recursos Ingeniería Informática y Ade

Licencia

Este trabajo está bajo una Licencia Creative Commons BY-NC-ND 4.0.

Permisos: Se permite compartir, copiar y redistribuir el material en cualquier medio o formato.

Condiciones: Es necesario dar crédito adecuado, proporcionar un enlace a la licencia e indicar si se han realizado cambios. No se permite usar el material con fines comerciales ni distribuir material modificado.



Métodos Cuantitativos

Ismael Sallami Moreno

<https://elblogdeismael.github.io>

Índice general

1	Introducción	9
1.1	Desarrollo de la investigación operativa	9
1.2	Modelización	9
1.3	Optimización en investigación operativa	10
1.4	Áreas de la investigación operativa	11
2	Introducción a la programación lineal	13
2.1	Convexidad	13
2.2	Planteamiento de un problema de programación matemática	14
2.3	Concepto de solución. Tipos de solución	15
2.4	Resolución gráfica	16
3	Algoritmo símplex. Dualidad. Análisis de sensibilidad. Programación entera	19
3.1	Fundamentos del símplex	19
3.2	Método de la M y método de las dos fases	20
3.3	Dualidad	21
3.4	Análisis de sensibilidad	22
3.5	Programación entera	23
4	Optimización no lineal	25
4.1	Introducción	25
4.2	Programación convexa	25
4.3	Programación no lineal sin restricciones	26
4.4	Programación no lineal con restricciones	27
4.5	Casos particulares con nombre propio	29
5	Teoría de la decisión	31
5.1	Elementos de un problema de decisión	31

5.2	Clasificación	31
5.3	Decisión en ambiente de certeza	32
5.4	Decisión en ambiente de riesgo	32
5.5	Decisión en ambiente de incertidumbre	33
5.6	Modelos de decisión en logística y transportes	35
6	Decisiones multicriterio	37
6.1	La teoría de la decisión multicriterio discreta	37
6.2	Preparación de los datos	38
6.3	Dominancia y eficiencia	38
6.4	MAUT	38
6.5	PROMETHEE	39
6.6	AHP	40
6.7	Comparación	41
7	Teoría de juegos	43
7.1	Introducción	43
7.2	Juegos no cooperativos	43
7.3	El teorema minimax de Von Neumann	44
7.4	Juegos cooperativos	45
8	Programación multiobjetivo	49
8.1	Aspectos básicos	49
8.2	Soluciones Pareto-óptimas	49
8.3	Resolución gráfica con dos objetivos	50
8.4	Técnicas generadoras	51
8.5	Programación por compromiso	51
8.6	Programación por metas	52
8.7	Comparación	53
9	Relación de ejercicios	55
9.1	Formas estándar y canónica	55
9.2	Símplex	56
9.3	Formulación de problemas	57

9.4	Método de la M grande	59
9.5	Método de las dos fases	59
9.6	Dualidad	60

Introducción

Tema 1 del programa. Qué es la investigación operativa, cómo se construye un modelo y qué se entiende por optimizar.

1.1 Desarrollo de la investigación operativa

La **investigación operativa** aplica el método científico a la toma de decisiones: representa un problema real con un modelo matemático, lo resuelve y traduce la solución de vuelta al problema.

Nació durante la Segunda Guerra Mundial, con equipos que estudiaban el despliegue de radares, la organización de convoyes y la asignación de recursos escasos. Terminada la guerra, esos métodos pasaron a la industria, donde el problema es el mismo con otro vocabulario: repartir recursos limitados entre usos que compiten.

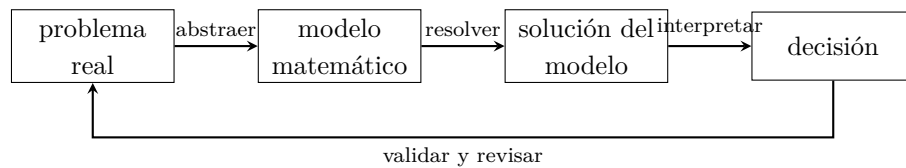
Hito	Qué aportó
Años cuarenta	primeros equipos de investigación operativa
1947, Dantzig	el algoritmo símplex
Años cincuenta	teoría de la dualidad, programación entera y dinámica
Años setenta	teoría de la complejidad: qué problemas son tratables
1979 y 1984	algoritmos de punto interior, polinómicos para lineal
Hoy	problemas con millones de variables se resuelven a diario

El salto de capacidad no vino solo del ordenador. Los algoritmos han mejorado en un factor comparable al del propio hardware, y la combinación es lo que ha hecho resolubles problemas que en los años sesenta eran inabordables.

1.2 Modelización

Un **modelo** es una representación simplificada de la realidad que conserva lo esencial para la decisión que se quiere tomar. Modelar es decidir **qué se deja fuera**, y ahí está la dificultad.

1.2.1 El ciclo



Las fases, en detalle:

Fase	Qué se hace
1 · Definición	qué se decide, qué se persigue, qué limita
2 · Formulación	variables de decisión, función objetivo y restricciones
3 · Resolución	aplicar el algoritmo que corresponda
4 · Validación	comprobar que el modelo reproduce lo conocido
5 · Implantación	llevar la solución a la práctica y vigilarla

La fase 1 es la que más se descuida y la que más decide. Un modelo bien resuelto de un problema mal planteado es una respuesta exacta a la pregunta equivocada. Y la fase 4 es la que evita publicar como solución algo que el modelo produce por un error de signo.

1.2.2 Clasificación de modelos

Criterio	Tipos
Certidumbre	determinista, estocástico
Tiempo	estático, dinámico
Variables	continuo, entero, mixto
Objetivos	monoobjetivo, multiobjetivo
Linealidad	lineal, no lineal
Decisores	un decisor, varios (teoría de juegos)

La asignatura recorre esa tabla: los temas 2 a 4 son determinista y monoobjetivo, el 5 introduce la incertidumbre, el 6 los criterios múltiples, el 7 los decisores múltiples y el 8 los objetivos múltiples.

1.3 Optimización en investigación operativa

El problema general de optimización:

$$\text{Opt. } f(\mathbf{x}) \quad \text{s.a. } \mathbf{x} \in S \subseteq \mathbb{R}^n$$

Elemento	Qué es
$\mathbf{x}$	variables de decisión: lo que se elige
f	función objetivo: lo que se quiere optimizar
S	región factible: lo que las restricciones permiten

Minimizar y maximizar son el mismo problema, porque

$$\text{máx } f(\mathbf{x}) = - \text{mín } [-f(\mathbf{x})]$$

y el punto donde se alcanza es el mismo. El temario formula en la dirección que resulte natural en cada caso y traduce cuando hace falta.

1.3.1 Tipos de óptimo

- $\mathbf{x}^*$ es **óptimo global** si $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in S$.
- $\mathbf{x}^*$ es **óptimo local** si la desigualdad solo se cumple dentro de un entorno de $\mathbf{x}^*$ contenido en S .

Todo óptimo global es local, y no al revés. Casi toda la dificultad de la optimización no lineal del tema 4 está en esa distinción, y el resultado que la resuelve es el de la programación convexa: **en un problema convexo, todo óptimo local es global**. Es la razón de que el tema 2 empiece por la convexidad.

1.3.2 Situaciones posibles

Un problema de optimización puede terminar de cuatro maneras, y el algoritmo debe distinguirlas:

Caso	Qué significa
Óptimo único	hay un solo punto que optimiza
Óptimos múltiples	hay infinitos puntos con el mismo valor óptimo
No acotado	la función objetivo mejora sin límite dentro de S
Infactible	$S = \emptyset$: ninguna solución cumple todas las restricciones

Las dos últimas suelen ser **errores de formulación** más que propiedades del problema real: un modelo no acotado indica que falta una restricción, y uno infactible que sobran o se contradicen.

1.4 Áreas de la investigación operativa

Área	De qué trata	Tema
Programación lineal	objetivo y restricciones lineales	2 y 3
Programación entera	variables que solo toman valores enteros	3
Programación no lineal	objetivo o restricciones no lineales	4
Teoría de la decisión	decidir bajo incertidumbre	5
Decisión multicriterio	varios criterios sobre alternativas discretas	6
Teoría de juegos	varios decisores con intereses distintos	7
Programación multiobjetivo	varios objetivos sobre un continuo	8

Área	De qué trata	Tema
Redes y flujos	transporte, asignación, camino mínimo	dentro del 3
Colas e inventarios	sistemas de espera y de almacenamiento	fuera del programa

Los temas 6 y 8 se parecen y no son lo mismo: **el 6 elige entre un conjunto finito de alternativas ya dadas, y el 8 optimiza varios objetivos sobre una región continua**. Confundirlos es el error de encuadre más habitual de la asignatura.

El planteamiento de la investigación operativa y del proceso de modelización sigue a Hillier y Lieberman, 1991 y Taha, 2004; la clasificación de los problemas de optimización, a Barbolla et al., 2001 y Ríos-Insua et al., 2004.

Introducción a la programación lineal

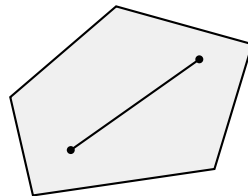
Tema 2 del programa. Convexidad, formulación de un problema lineal, tipos de solución y resolución gráfica.

2.1 Convexidad

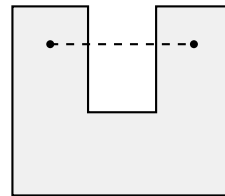
2.1.1 Conjuntos convexos

Un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es **convexo** si el segmento que une dos puntos cualesquiera suyos está contenido en él:

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S, \lambda \in [0, 1] \implies \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \in S$$



convexo



no convexo

En el segundo, el segmento entre los dos puntos marcados sale del conjunto.

Propiedades que se usan continuamente:

Propiedad	Enunciado
Intersección	la intersección de conjuntos convexos es convexa
Semiespacios	$\{\mathbf{x} : \mathbf{a}'\mathbf{x} \leq b\}$ es convexo
Poliedro	intersección finita de semiespacios; es convexo

De las tres sale el resultado sobre el que descansa toda la programación lineal: **la región factible de un problema lineal es un poliedro convexo**, porque es la intersección de los semiespacios que definen sus restricciones.

Un **punto extremo** o vértice de S es el que no se puede escribir como combinación convexa de otros dos puntos distintos de S .

2.1.2 Funciones convexas

f es **convexa** en un conjunto convexo S si

$$f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda)f(\mathbf{y})$$

para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ y $\lambda \in [0, 1]$: la cuerda queda por encima de la función. Es **cóncava** si se cumple la desigualdad contraria.

Caracterización	Convexa	Cóncava
Con f derivable dos veces, $n = 1$	$f''(x) \geq 0$	$f''(x) \leq 0$
Con f derivable dos veces, $n > 1$	matriz hessiana semidefinida positiva	semidefinida negativa

Una función **lineal** es a la vez **convexa** y **cóncava**, porque cumple las dos desigualdades con igualdad. De ahí que la programación lineal sea el caso más manejable: cualquier resultado que valga para funciones convexas y cualquiera que valga para cóncavas se le aplica.

Y el resultado que justifica todo el tema 4:

En un problema de minimizar una función convexa sobre un conjunto convexo, **todo óptimo local es global**.

2.2 Planteamiento de un problema de programación matemática

$$\text{Opt. } f(\mathbf{x}) \quad \text{s.a.} \quad \begin{cases} g_i(\mathbf{x}) \leq 0, & i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{x}) = 0, & j = 1, \dots, p \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

Es **lineal** cuando f , g_i y h_j lo son todas.

2.2.1 Formulación de un problema lineal

Tres pasos, y en este orden:

1. **Variables de decisión.** Qué se decide, con sus unidades. Definirlas mal es irreparable después.
2. **Función objetivo.** Qué se maximiza o minimiza, en función de las variables.
3. **Restricciones.** Qué limita: recursos, demandas, capacidades, relaciones técnicas, y la no negatividad.

Ejemplo. Un fabricante produce sillas y mesas. Una silla necesita 1 hora de montaje y 2 de pintura; una mesa, 3 de montaje y 1 de pintura. Hay 9 horas de montaje y 8 de pintura al día. El beneficio de una mesa es el doble que el de una silla.

Paso	Resultado
Variables	x sillas al día, y mesas al día
Objetivo	máx $z = x + 2y$, tomando el beneficio de la silla como unidad
Montaje	$x + 3y \leq 9$
Pintura	$2x + y \leq 8$
No negatividad	$x, y \geq 0$

La no negatividad no es un detalle formal: sin ella la región factible no está acotada por abajo y el problema puede salir no acotado.

2.2.2 Formas del problema

Forma	Restricciones	Variables
Canónica (max)	todas $\leq$	todas ≥ 0
Canónica (min)	todas $\geq$	todas ≥ 0
Estándar	todas $=$	todas ≥ 0

Las conversiones, que son las del ejercicio 1 del último capítulo:

Situación	Qué se hace
$\sum a_j x_j \leq b$	sumar una variable de holgura : $\sum a_j x_j + s = b$, con $s \geq 0$
$\sum a_j x_j \geq b$ $b < 0$	restar una variable de exceso : $\sum a_j x_j - s = b$ multiplicar la restricción por -1 y girar la desigualdad
$x_j \leq 0$	cambiar de variable: $x'_j = -x_j \geq 0$
x_j sin restricción de signo	escribir $x_j = x_j^+ - x_j^-$, con los dos ≥ 0
mín z	mín $z = -\text{máx}(-z)$

El **símplex del tema 3** exige la **forma estándar**, así que estas conversiones son el paso previo a cualquier resolución.

2.3 Concepto de solución. Tipos de solución

Con el problema en forma estándar $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, con $\mathbf{A}$ de orden $m \times n$ y $\text{rg}(\mathbf{A}) = m < n$:

Tipo	Definición
Solución	cualquier $\mathbf{x}$ que cumpla $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$
Solución factible	además $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$
Solución básica	se anulan $n - m$ variables y las m restantes forman una base
Solución básica factible	básica y además no negativa
Solución básica degenerada	básica factible con alguna variable básica nula

Tipo	Definición
Solución óptima	factible que optimiza f

Y el **teorema fundamental de la programación lineal**, que es lo que hace posible el símplex:

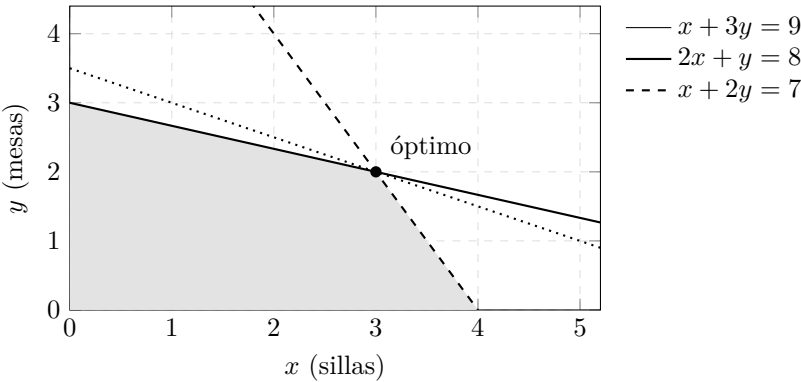
Si existe solución óptima, **al menos una de ellas es una solución básica factible**, y las soluciones básicas factibles se corresponden con los puntos extremos de la región factible.

La consecuencia práctica: no hay que explorar infinitos puntos, sino a lo sumo $\binom{n}{m}$ vértices. Es un número finito, y sigue siendo enorme, de ahí que haga falta un algoritmo que los recorra con criterio en vez de enumerarlos.

2.4 Resolución gráfica

Con dos variables el problema se resuelve dibujando.

Paso	Qué se hace
1	representar cada restricción como una recta y sombrear su semiplano
2	la intersección de todos es la región factible
3	dibujar una curva de nivel de la función objetivo
4	desplazarla en la dirección del gradiente hasta el último punto factible



La región sombreada es la factible; sus vértices son $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(3, 2)$ y $(0, 3)$. Evaluando $z = x + 2y$:

Vértice	z
$(0, 0)$	0
$(4, 0)$	4
$(3, 2)$	7
$(0, 3)$	6

El óptimo es $(3, 2)$ con $z = 7$: tres sillas y dos mesas al día. La recta punteada es la curva de nivel $z = 7$, que toca la región justo en ese vértice.

2.4.1 Los cuatro desenlaces, vistos en el gráfico

Caso	Qué se ve
Óptimo único	la curva de nivel toca la región en un solo vértice
Óptimos múltiples	la curva de nivel es paralela a una arista , y toda ella es óptima
No acotado	la región es ilimitada en la dirección de mejora
Infactible	los semiplanos no tienen intersección común

El segundo caso se reconoce en la formulación sin dibujar: ocurre cuando el vector de coeficientes del objetivo es proporcional al de una restricción activa. En el ejemplo pasaría con $z = x + 3y$, paralelo a la restricción de montaje.

Y el método gráfico no escala. Con tres variables ya es incómodo y con cuatro no hay dibujo, así que hace falta un procedimiento algebraico que recorra los vértices: el simplex del tema 3.

La convexidad y los tipos de solución siguen a Goberna et al., 2004 y Barbolla et al., 2001; la formulación y la resolución gráfica, a Hillier y Lieberman, 1991 y Taha, 2004.

Algoritmo símplex. Dualidad.

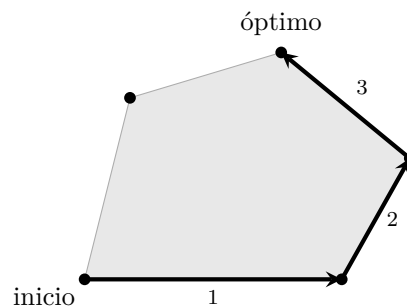
Análisis de sensibilidad.

Programación entera

Tema 3 del programa, el más largo. El algoritmo que resuelve el problema lineal, su problema dual, qué pasa al cambiar los datos y qué hacer cuando las variables tienen que ser enteras.

3.1 Fundamentos del símplex

El teorema fundamental del tema 2 dice que, si hay óptimo, hay un vértice óptimo. El símplex recorre vértices adyacentes mejorando el objetivo en cada paso.



Su esquema:

Paso	Qué se hace
1	partir de una solución básica factible
2	comprobar si es óptima; si lo es, terminar
3	elegir qué variable entra en la base
4	elegir qué variable sale
5	pivotar y volver al 2

3.1.1 La tabla

Con el problema en forma estándar, la tabla recoge en cada iteración la base actual:

c_B	VB	x_1	$\cdots$	x_n	$\mathbf{X}_B$
c_{B1}	x_{B1}				b_1

c_B	VB	x_1	$\cdots$	x_n	$\mathbf{X}_B$
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$
	$z_j - c_j$				z

La fila $z_j - c_j$ es la de los **costes reducidos**: cuánto cambia el objetivo por cada unidad que entre de x_j .

3.1.2 Criterios

Criterio	Maximizar	Minimizar
Óptimo alcanzado	todos $z_j - c_j \geq 0$	todos $z_j - c_j \leq 0$
Variable que entra	la más negativa	la más positiva
Variable que sale	mínimo cociente b_i/a_{ij} con $a_{ij} > 0$	igual

El **criterio del mínimo cociente** es lo que garantiza que la solución siguiente sigue siendo factible: si se entrara más allá de ese valor, alguna variable básica se volvería negativa.

Y los casos especiales que la tabla detecta sin ambigüedad:

Situación	Cómo se reconoce en la tabla
Óptimos múltiples	una variable no básica tiene $z_j - c_j = 0$
No acotado	la columna que entra no tiene ningún $a_{ij} > 0$
Degeneración	alguna variable básica vale 0
Infactible	queda una artificial positiva al terminar

La **degeneración** puede producir ciclado: la base cambia y el objetivo no mejora. Es raro en la práctica y se evita con la regla de Bland, que elige siempre el índice menor entre los candidatos.

3.2 Método de la M y método de las dos fases

Con restricciones $\geq$ o $=$ no hay base inicial evidente, porque las variables de exceso entran con coeficiente -1 . Se añaden **variables artificiales** para tener una base de partida, y hay dos maneras de expulsarlas.

3.2.1 Método de la M grande

Se penaliza cada artificial en el objetivo con una constante M arbitrariamente grande:

$$\text{máx } z = \mathbf{c}'\mathbf{x} - M \sum_k t_k \quad \text{o} \quad \text{mín } z = \mathbf{c}'\mathbf{x} + M \sum_k t_k$$

El simplex las saca por sí solo, porque mantenerlas cuesta mucho. Al terminar:

- si todas las artificiales valen cero, la solución es óptima del problema original;
- si alguna queda positiva, **el problema es infactible**.

Su inconveniente es numérico: un M demasiado grande produce errores de redondeo que confunden los costes reducidos, y uno demasiado pequeño puede no expulsar las artificiales.

3.2.2 Método de las dos fases

Evita ese problema separando el trabajo.

Fase	Objetivo	Qué se busca
1	$\text{mín } w = \sum_k t_k$	una solución básica factible del problema original
2	el objetivo original	el óptimo, partiendo de la base que dejó la fase 1

Al terminar la fase 1:

- si $w = 0$, todas las artificiales son cero y se pasa a la fase 2;
- si $w > 0$, **el problema es infactible** y no hay fase 2.

Es el método preferible por estabilidad numérica, y es el que pide el ejercicio 9 del último capítulo.

3.3 Dualidad

3.3.1 Formulación del dual

A todo problema lineal —el **primal**— le corresponde otro, el **dual**:

Primal (max)	Dual (min)
$\text{máx } \mathbf{c}'\mathbf{x}$	$\text{mín } \mathbf{b}'\mathbf{y}$
s.a. $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$	s.a. $\mathbf{A}'\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$
$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$	$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$

La correspondencia, término a término:

Primal	Dual
m restricciones	m variables
n variables	n restricciones
coeficientes del objetivo	términos independientes
términos independientes	coeficientes del objetivo
matriz $\mathbf{A}$	su traspuesta $\mathbf{A}'$
restricción $\leq$	variable ≥ 0
restricción $=$	variable sin restricción de signo
variable ≥ 0	restricción $\geq$
variable sin restricción de signo	restricción $=$

Y el **dual del dual es el primal**: la relación es simétrica.

3.3.2 Relaciones primal-dual

Teorema	Enunciado
Dualidad débil	si $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son factibles, $\mathbf{c}'\mathbf{x} \leq \mathbf{b}'\mathbf{y}$
Dualidad fuerte	si uno tiene óptimo finito, el otro también, y los valores coinciden
Holgura complementaria	en el óptimo, $y_i (b_i - \mathbf{a}_i'\mathbf{x}) = 0$ para todo i

De la dualidad débil sale una consecuencia útil: **si el primal es no acotado, el dual es infactible**, y al revés. Lo que no se puede deducir es lo contrario: los dos pueden ser infactibles a la vez.

La **holgura complementaria** dice, en palabras: si un recurso sobra en el óptimo, su precio sombra es cero; y si su precio sombra es positivo, ese recurso se agota. Es lo que permite reconstruir la solución de un problema a partir de la del otro sin resolverlo.

3.3.3 Interpretación económica

Las variables duales y_i son los **precios sombra** de los recursos: cuánto mejora el objetivo por cada unidad adicional del recurso i .

$$y_i = \frac{\partial z^*}{\partial b_i}$$

En el ejemplo de sillas y mesas del tema 2, el precio sombra de la hora de montaje dice cuánto más se ganaría con una hora más de montaje al día, y por tanto **cuánto como máximo compensa pagar** por esa hora extra. Es la lectura que convierte la dualidad en una herramienta de gestión y no en una curiosidad algebraica.

Y aparecen ya calculados: **los precios sombra están en la fila $z_j - c_j$ de la tabla óptima**, bajo las columnas de las variables de holgura.

3.3.4 Símplex dual

Trabaja al revés: mantiene la condición de optimalidad y va restaurando la factibilidad.

	Símplex primal	Símplex dual
Punto de partida	factible, no óptimo	óptimo, no factible
Sale de la base	por el mínimo cociente	la variable básica más negativa
Entra en la base	el coste reducido más favorable	por un cociente sobre la fila pivote
Termina cuando	se cumple la optimalidad	se cumple la factibilidad

Su uso natural es el análisis de sensibilidad: cuando cambia un término independiente y la base óptima deja de ser factible, el símplex dual la repara en pocas iteraciones en vez de resolver de nuevo.

3.4 Análisis de sensibilidad

Estudia cómo cambia la solución óptima al cambiar los datos, **sin resolver otra vez**. Es lo que hace utilizable un modelo cuyos datos son estimaciones.

Cambio	Qué se estudia
En c_j de una variable básica	intervalo en el que la base sigue siendo óptima
En c_j de una no básica	cuánto puede subir antes de entrar en la base
En b_i	intervalo en el que la base sigue siendo factible
Nueva variable	se calcula su coste reducido; si es favorable, entra
Nueva restricción	se comprueba si el óptimo la cumple; si no, símplex dual

Los dos intervalos que se piden siempre:

- **Rango de optimalidad** de c_j : el intervalo en el que la base óptima no cambia. La solución sigue siendo la misma; lo que cambia es el valor de z .
- **Rango de factibilidad** de b_i : el intervalo en el que la base sigue siendo factible. Dentro de él, el precio sombra y_i es constante y z varía a razón de y_i por unidad.

Fuera del rango de factibilidad el precio sombra cambia, y por eso no se puede extrapolar: duplicar un recurso no duplica la ganancia, porque en algún punto deja de ser el cuello de botella y otro recurso pasa a serlo.

3.5 Programación entera

Cuando las variables deben tomar valores enteros:

Tipo	Variables
Entera pura	todas enteras
Entera mixta	algunas enteras, otras continuas
Binaria	todas valen 0 o 1

Las binarias sirven para modelar decisiones lógicas —hacer o no hacer, elegir una opción entre varias, condicionales entre restricciones— y son las que hacen a la programación entera mucho más expresiva que la lineal.

3.5.1 Por qué no basta redondear

Es la primera tentación y es un error de dos clases:

- **La solución redondeada puede ser infactible**, si el punto continuo estaba sobre el borde de la región.
- **Puede ser factible y no óptima**, y a veces muy lejos del óptimo entero: el óptimo entero no tiene por qué estar cerca del continuo.

Lo que sí es cierto y se usa como cota: **el valor óptimo del problema relajado —ignorando la integridad— es una cota superior en maximización**, porque la región continua contiene a la entera.

3.5.2 Ramificación y acotación

Paso	Qué se hace
1	resolver la relajación continua
2	si la solución es entera, es la óptima
3	si no, elegir una variable fraccionaria $x_j = v$ y ramificar
4	crear dos subproblemas: $x_j \leq \lfloor v \rfloor$ y $x_j \geq \lceil v \rceil$
5	resolver cada uno y podar los que no puedan mejorar la mejor solución entera conocida

La poda es lo que hace viable el método: una rama cuya cota es peor que la mejor solución entera ya encontrada no puede contener el óptimo, y se abandona entera.

Encontrar pronto una buena solución entera acelera mucho, porque una cota exigente poda más ramas. Por eso los programas dedican esfuerzo a heurísticas iniciales antes de ramificar en serio.

3.5.3 Planos de corte

La alternativa: resolver la relajación y añadir restricciones que corten la solución fraccionaria sin eliminar ningún punto entero factible. Se repite hasta que la solución de la relajación sea entera. Los cortes de Gomory son el caso clásico, y hoy se combinan con la ramificación en los métodos de ramificación y corte.

3.5.4 Coste

La programación entera es **NP-dura**: no se conoce algoritmo de tiempo polinómico y el número de nodos del árbol puede crecer exponencialmente. La diferencia con la lineal es de naturaleza, no de grado, y por eso conviene formular con el menor número posible de variables enteras.

El simplex, la dualidad y el análisis de sensibilidad siguen a Hillier y Lieberman, 1991, Taha, 2004 y Goberna et al., 2004; la programación entera y sus algoritmos, a Bazaraa et al., 1998 y Martín Martín, 2003.

Optimización no lineal

Tema 4 del programa, y último de la parte 1. Cuando el objetivo o las restricciones dejan de ser lineales: programación convexa, optimización sin restricciones y con restricciones.

4.1 Introducción

$$\text{Opt. } f(\mathbf{x}) \quad \text{s.a. } g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad h_j(\mathbf{x}) = 0$$

con alguna de esas funciones no lineal. Dos cosas cambian respecto de los temas 2 y 3:

	Lineal	No lineal
Dónde está el óptimo	siempre en un vértice	en cualquier punto de la región
Óptimos locales	el local es global	puede haber muchos locales distintos
Algoritmo	símplex, finito y exacto	iterativo, y converge a un local
Región factible	poliedro convexo	cualquier conjunto

El óptimo puede estar en el interior, y eso invalida la idea que sostenía el símplex. Por eso aquí no hay un algoritmo único: hay familias de métodos, y cuál sirve depende de la estructura del problema.

4.2 Programación convexa

Es el caso tratable, y la razón de que el tema 2 empezara por la convexidad.

Un problema es **convexo** cuando se minimiza una función convexa sobre un conjunto convexo, lo que ocurre si:

- f es convexa;
- las g_i de las restricciones $\leq$ son convexas;
- las h_j de las restricciones de igualdad son lineales.

Teorema. En un problema convexo, todo óptimo local es global. Y si f es estrictamente convexa, el óptimo es único.

Es el resultado más útil del tema: **convierte un problema global en uno local**. Un algoritmo que solo sabe bajar hasta que no puede más da con la solución del problema entero, y no hace falta comprobar si hay algo mejor en otra parte.

Comprobar la convexidad, en la práctica:

Función	Cómo se comprueba
Una variable	$f''(x) \geq 0$ en todo el dominio
Varias variables	matriz hessiana semidefinida positiva
Suma	la suma de convexas es convexa
Máximo	el máximo de convexas es convexo
Composición	$g(f(x))$ con g convexa creciente y f convexa

Y para saber si una hessiana es semidefinida positiva basta con que todos sus menores principales sean no negativos, o con que todos sus valores propios lo sean.

4.3 Programación no lineal sin restricciones

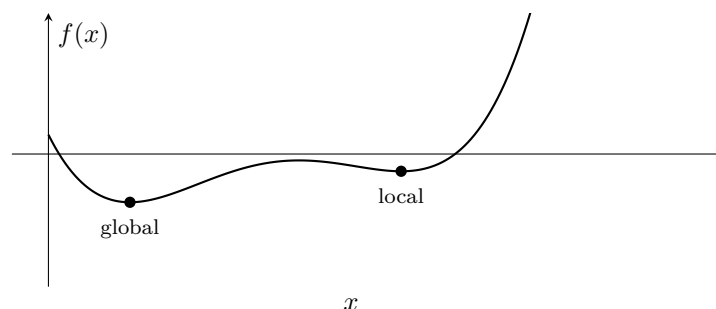
$$\min f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

4.3.1 Condiciones de optimalidad

Condición	Enunciado
Necesaria de primer orden	$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$
Suficiente de segundo orden	además, hessiana definida positiva en $\mathbf{x}^*$

Un punto con gradiente nulo es un **punto crítico**, y puede ser mínimo, máximo o punto de silla. La hessiana lo distingue:

Hessiana en $\mathbf{x}^*$	Qué es
Definida positiva	mínimo local
Definida negativa	máximo local
Indefinida	punto de silla
Semidefinida	no concluyente; hay que mirar órdenes superiores



La función tiene dos mínimos locales de valor distinto: un método de descenso converge a uno o a otro **según dónde empiece**. Es exactamente lo que la convexidad evita.

4.3.2 Métodos de descenso

Todos comparten el esquema

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k$$

con $\mathbf{d}_k$ una dirección de descenso y α_k el paso.

Método	Dirección	Convergencia	Coste por iteración
Gradiente	$-\nabla f(\mathbf{x}_k)$	lineal, lenta en valles alargados	bajo
Newton	$-\mathbf{H}^{-1}\nabla f$	cuadrática cerca del óptimo	alto: hessiana e inversa
Cuasi-Newton	aproximación de $\mathbf{H}^{-1}$	superlineal	medio
Gradiente conjugado	combinación con la dirección anterior	superlineal	bajo

El **método del gradiente** es el más simple y el que peor se comporta en valles estrechos: avanza en zigzag, porque la dirección de máxima pendiente no apunta al mínimo salvo que las curvas de nivel sean circulares.

Newton converge muy rápido cerca del óptimo y tiene dos problemas: calcular e invertir la hessiana en cada iteración es caro, y lejos del óptimo la dirección puede no ser de descenso. Los **cuasi-Newton** —BFGS es el habitual— son el compromiso: aproximan la inversa de la hessiana con la información de los gradientes ya calculados.

El **paso** α_k se elige con una búsqueda unidimensional, exacta o aproximada. Un paso demasiado grande hace oscilar el método y uno demasiado pequeño lo detiene sin haber llegado.

4.4 Programación no lineal con restricciones

4.4.1 Restricciones de igualdad: multiplicadores de Lagrange

$$\min f(\mathbf{x}) \quad \text{s.a.} \quad h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, p$$

Se construye la **lagrangiana**:

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^p \lambda_j h_j(\mathbf{x})$$

y la condición necesaria es que su gradiente se anule:

$$\nabla_{\mathbf{x}} L = \mathbf{0}, \quad \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} L = \mathbf{0}$$

La primera ecuación dice que, en el óptimo, el **gradiente del objetivo es combinación lineal de los gradientes de las restricciones**: no hay ninguna dirección que mejore sin salirse de la restricción.

Los multiplicadores tienen la misma lectura que los precios sombra del tema 3:

$$\lambda_j = -\frac{\partial f^*}{\partial b_j}$$

es decir, cuánto mejora el óptimo por relajar una unidad esa restricción.

4.4.2 Restricciones de desigualdad: condiciones de Karush-Kuhn-Tucker

$$\min f(\mathbf{x}) \quad \text{s.a.} \quad g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

Con $L = f + \sum_i \mu_i g_i$, las condiciones son:

Condición	Expresión
Estacionariedad	$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_i \mu_i \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$
Factibilidad primal	$g_i(\mathbf{x}^*) \leq 0$
Factibilidad dual	$\mu_i \geq 0$
Holgura complementaria	$\mu_i g_i(\mathbf{x}^*) = 0$

La **holgura complementaria** es la misma idea del tema 3, y es la que hace utilizables estas condiciones:

- si la restricción i **no está activa** —se cumple con holgura—, entonces $\mu_i = 0$: no condiciona el óptimo;
- si $\mu_i > 0$, la restricción **está activa** y se cumple con igualdad.

Resolver por Karush-Kuhn-Tucker consiste en eso: probar qué subconjunto de restricciones está activo, resolver el sistema resultante y comprobar que la solución cumple las cuatro condiciones.

Y el alcance de las condiciones:

	Enunciado
Necesarias	siempre, si se cumple una cualificación de restricciones
Suficientes	si el problema es convexo

En un problema convexo, un punto que cumple Karush-Kuhn-Tucker **es el óptimo global**, y ahí se cierra el círculo del tema. En uno no convexo solo son necesarias: sirven para descartar puntos, no para confirmar el óptimo.

4.4.3 Otros métodos

Método	Idea
Penalización	añadir al objetivo un término que castigue violar las restricciones
Barrera	añadir un término que se dispare al acercarse al borde, desde dentro
Direcciones factibles	moverse solo por direcciones que no salgan de la región
Punto interior	recorrer el interior de la región en vez de sus vértices

Los de **punto interior** son los que hoy compiten con el *símples* incluso en problemas lineales: su número de iteraciones crece muy poco con el tamaño, aunque cada iteración cueste más. Para problemas grandes suelen ganar.

4.5 Casos particulares con nombre propio

Problema	Objetivo	Restricciones	Método
Programación cuadrática	cuadrática	lineales	métodos específicos, muy eficientes
Programación separable	suma de funciones de una variable	lineales	aproximación lineal a trozos
Programación geométrica	polinomios de exponentes reales	del mismo tipo	cambio a variables logarítmicas
Programación fraccional	cociente de dos lineales	lineales	transformación de Charnes-Cooper

La **cuadrática** es la más frecuente en economía, porque es la forma del problema de cartera: minimizar el riesgo, que es una forma cuadrática, con restricciones lineales de presupuesto y rentabilidad.

El tratamiento de la optimización no lineal y de las condiciones de optimalidad sigue a Luenberger, 2005 y Barbolla et al., 2001; los métodos numéricos y sus propiedades de convergencia, a Bazaraa et al., 1998 y Goberna et al., 2004.

Teoría de la decisión

Tema 5 del programa, primero de la parte 2. Decidir cuando el resultado no depende solo de lo que se elige: certeza, riesgo e incertidumbre.

5.1 Elementos de un problema de decisión

Elemento	Qué es
Decisor	quien elige
Alternativas	$a_1, \dots, a_m$: entre lo que se puede elegir
Estados de la naturaleza	$e_1, \dots, e_n$: lo que puede ocurrir y no se controla
Resultados	x_{ij} : lo que se obtiene con a_i si ocurre e_j
Criterio	la regla con la que se elige

Se representa en una **matriz de decisión**:

	e_1	e_2	$\dots$	e_n
a_1	x_{11}	x_{12}	$\dots$	x_{1n}
a_2	x_{21}	x_{22}	$\dots$	x_{2n}
$\vdots$				
a_m	x_{m1}	x_{m2}	$\dots$	x_{mn}

Los estados de la naturaleza tienen que ser **exhaustivos y mutuamente excluyentes**: uno y solo uno ocurrirá. Si no lo son, ningún criterio de los que siguen tiene sentido.

Y la diferencia con el tema 7 conviene fijarla ya: aquí los estados los produce la naturaleza, que **no tiene intereses**. En teoría de juegos el otro lado elige buscando su propio beneficio, y eso cambia por completo el análisis.

5.2 Clasificación

Según lo que se sepa de los estados:

Ambiente	Qué se sabe
Certeza	se sabe qué estado ocurrirá
Riesgo	se conocen las probabilidades de cada estado
Incetidumbre	no se conocen las probabilidades

Ambiente	Qué se sabe
Competencia	los estados los decide otro decisor (tema 7)

5.3 Decisión en ambiente de certeza

Solo hay un estado posible, así que la matriz tiene una columna y se elige la alternativa de mejor resultado. Si las alternativas son muchas o infinitas, elegir es resolver un problema de optimización: **los temas 2 a 4 son decisión en certeza.**

5.4 Decisión en ambiente de riesgo

Se conocen las probabilidades $p_1, \dots, p_n$ de los estados.

5.4.1 Valor esperado

$$E[a_i] = \sum_{j=1}^n p_j x_{ij}$$

Se elige la alternativa de mayor valor esperado, si son beneficios, o de menor si son costes.

Ejemplo. Un comerciante decide cuántas unidades pedir. Beneficios en euros:

	Demanda baja ($p = 0,3$)	Media ($p = 0,5$)	Alta ($p = 0,2$)	E
Pedir 100	300	300	300	300
Pedir 200	100	500	500	380
Pedir 300	-100	300	800	280

$$E[200] = 0,3(100) + 0,5(500) + 0,2(500) = 380$$

Se elige pedir 200. Y conviene notar que **no es la alternativa que gana en ningún estado concreto**: gana en media, que es otra cosa.

5.4.2 Valor esperado de la información perfecta

Cuánto vale, como máximo, saber de antemano qué va a ocurrir:

$$VEIP = \sum_j p_j \max_i x_{ij} - \max_i E[a_i]$$

En el ejemplo: $0,3(300) + 0,5(500) + 0,2(800) = 500$, y $500 - 380 = 120$. Un estudio de mercado infalible no valdría más de 120 euros, y esa cifra es la que decide si contratarlo.

5.4.3 El criterio del valor esperado no siempre encaja

Dos objeciones que el temario recoge:

- **No sirve para decisiones que no se repiten.** El valor esperado es un promedio sobre muchas repeticiones; en una decisión única, ese promedio no se materializa.
- **Ignora la actitud ante el riesgo.** Nadie apuesta su patrimonio a una lotería con valor esperado ligeramente positivo.

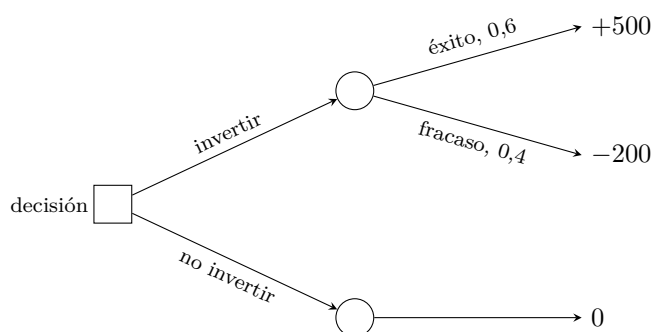
De ahí la **utilidad esperada**: se sustituye el dinero por una función de utilidad $u(x)$ que recoge la actitud del decisor, y se maximiza $\sum_j p_j u(x_{ij})$.

Forma de u	Actitud
Cóncava	aversión al riesgo
Lineal	neutral
Convexa	propensión al riesgo

Con u cóncava, el decisor prefiere una cantidad segura a una lotería del mismo valor esperado, y la diferencia entre ese valor esperado y la cantidad segura que lo iguala es la **prima de riesgo**.

5.4.4 Árboles de decisión

Cuando hay decisiones en varias etapas, la matriz no basta y se usa un árbol.



Los cuadrados son **nodos de decisión** y los círculos, **nodos de azar**. Se resuelve **de derecha a izquierda**: en cada nodo de azar se calcula el valor esperado, y en cada nodo de decisión se elige la rama de mayor valor. Aquí, $0,6(500) + 0,4(-200) = 220 > 0$, así que se invierte.

5.5 Decisión en ambiente de incertidumbre

Sin probabilidades, no hay valor esperado. Hay varios criterios, y **cada uno puede elegir una alternativa distinta**: la elección del criterio es en sí misma una decisión.

Matriz de ejemplo, beneficios:

	e_1	e_2	e_3
a_1	40	60	20
a_2	10	90	30
a_3	50	50	50

5.5.1 Criterio de Wald o maximin

Pesimista: se supone el peor estado y se elige lo mejor dentro de eso.

$$\max_i \min_j x_{ij}$$

	Mínimo
a_1	20
a_2	10
a_3	50

Elige a_3 . Es el criterio conservador, y el adecuado cuando un mal resultado es inasumible.

5.5.2 Criterio optimista o maximax

$$\max_i \max_j x_{ij}$$

	Máximo
a_1	60
a_2	90
a_3	50

Elige a_2 . Es el criterio del que solo mira al mejor escenario.

5.5.3 Criterio de Hurwicz

Interpola entre los dos con un coeficiente de optimismo $\alpha \in [0, 1]$:

$$\max_i \left[\alpha \max_j x_{ij} + (1 - \alpha) \min_j x_{ij} \right]$$

Con $\alpha = 0,6$:

	Cálculo	Valor
a_1	$0,6(60) + 0,4(20)$	44
a_2	$0,6(90) + 0,4(10)$	58
a_3	$0,6(50) + 0,4(50)$	50

Con $\alpha = 0$ es Wald y con $\alpha = 1$ es maximax. **El resultado depende de α** , y α lo pone el decisor: el criterio no elimina la subjetividad, la hace explícita.

5.5.4 Criterio de Savage o del mínimo arrepentimiento

Se construye la **matriz de arrepentimientos**, restando cada resultado del mejor de su columna:

$$r_{ij} = \max_k x_{kj} - x_{ij}$$

	e_1	e_2	e_3	Máximo
a_1	10	30	30	30
a_2	40	0	20	40
a_3	0	40	0	40

Se elige el menor de los máximos: aquí a_1 , con 30. Mide lo que se lamentará haber elegido mal cuando se sepa qué ocurrió.

Su defecto conocido es que **no es independiente de alternativas irrelevantes**: añadir una alternativa nueva y peor puede cambiar cuál gana entre las anteriores, porque cambia los máximos por columna.

5.5.5 Criterio de Laplace

A falta de información, se supone que todos los estados son igual de probables y se aplica el valor esperado:

	Media
a_1	40
a_2	43,33
a_3	50

Elige a_3 . Su objeción es que **la ignorancia no es lo mismo que la equiprobabilidad**: no saber nada de los estados no autoriza a afirmar que son igualmente probables.

5.5.6 Resumen del ejemplo

Criterio	Elige
Wald	a_3
Maximax	a_2
Hurwicz, $\alpha = 0,6$	a_2
Savage	a_1
Laplace	a_3

Los tres candidatos salen elegidos por algún criterio. Eso no es un fallo del método: es que sin probabilidades no hay una respuesta objetiva, y lo que aporta el análisis es dejar claro qué supuesto lleva a qué elección.

5.6 Modelos de decisión en logística y transportes

Casos de decisión que se formulan como problemas lineales de los temas 2 y 3.

5.6.1 Problema del transporte

Llevar un producto de m orígenes con oferta a_i a n destinos con demanda b_j , con coste unitario c_{ij} , minimizando el coste total:

$$\min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \quad \text{s.a.} \quad \sum_j x_{ij} = a_i, \quad \sum_i x_{ij} = b_j, \quad x_{ij} \geq 0$$

Está **equilibrado** si $\sum a_i = \sum b_j$; si no, se añade un origen o un destino ficticio con coste cero.

Es un problema lineal y se podría resolver con el **símplex**, pero su estructura permite métodos específicos mucho más rápidos:

Fase	Métodos
Solución inicial	esquina noroeste, coste mínimo, aproximación de Vogel
Mejora	método del salto de piedra en piedra, o de los multiplicadores

La **esquina noroeste** es la más simple y la que peor arranca, porque ignora los costes; **Vogel** da la mejor solución inicial y suele quedarse muy cerca del óptimo.

Y una propiedad valiosa: si las ofertas y demandas son enteras, **la solución óptima es entera automáticamente**. No hace falta programación entera, y eso lo distingue de casi todo lo del tema 3.

5.6.2 Problema de asignación

Caso particular con $m = n$ y todas las ofertas y demandas iguales a 1: asignar n tareas a n personas, una a una, minimizando el coste. Se resuelve con el **método húngaro**, en tiempo polinómico.

5.6.3 Problemas en redes

Problema	Qué busca
Camino más corto	la ruta de menor coste entre dos nodos
Flujo máximo	cuánto se puede enviar entre dos nodos con capacidades limitadas
Árbol de expansión mínimo	conectar todos los nodos con coste total mínimo
Flujo de coste mínimo	el modelo general que engloba a los anteriores

Todos son lineales, todos tienen algoritmos específicos más rápidos que el **símplex** y todos dan **solución entera** cuando los datos lo son.

El planteamiento de la teoría de la decisión y sus criterios sigue a Aguado Franco, 2007 y Ríos-Insua et al., 2004; los modelos de transporte y de redes, a Hillier y Lieberman, 1991, Taha, 2004 y Bazaraa et al., 1998.

Decisiones multicriterio

Tema 6 del programa. Elegir entre un conjunto finito de alternativas cuando hay varios criterios que no apuntan en la misma dirección.

6.1 La teoría de la decisión multicriterio discreta

El tema 5 suponía un solo criterio: se maximiza el beneficio, o se minimiza el coste. Casi ninguna decisión real es así. Comprar un vehículo, elegir un proveedor, escoger la localización de una planta: en todos hay precio, calidad, plazo y riesgo, y lo que mejora uno empeora otro.

Con varios criterios no existe una alternativa mejor que todas. Existen las que no son peores que ninguna, y una elección que depende de las preferencias del decisor.

6.1.1 Elementos

Elemento	Notación
Alternativas	$a_1, \dots, a_m$, un conjunto finito
Criterios	$c_1, \dots, c_n$
Evaluaciones	x_{ij} : valor de la alternativa i en el criterio j
Pesos	$w_1, \dots, w_n$, con $\sum_j w_j = 1$

La **matriz de decisión** es la misma estructura del tema 5, y las columnas significan otra cosa: allí eran estados que podían ocurrir, aquí son criterios que se valoran a la vez. Esa diferencia es la que hace que aquí no haya probabilidades ni valor esperado.

6.1.2 Discreto y continuo

	Multicriterio discreto (tema 6)	Multiobjetivo continuo (tema 8)
Alternativas	un conjunto finito, ya dado	una región factible continua
Qué se hace	ordenarlas o elegir la mejor	generar soluciones eficientes
Herramientas	MAUT, PROMETHEE, AHP	programación por metas y por compromiso

Es la distinción que el tema 1 avisaba de no confundir.

6.2 Preparación de los datos

6.2.1 Normalización

Los criterios vienen en unidades distintas —euros, kilómetros, puntuaciones— y no se pueden sumar sin normalizar.

Método	Fórmula
Por el máximo	$r_{ij} = x_{ij} / \max_i x_{ij}$
Por el rango	$r_{ij} = (x_{ij} - \min_i x_{ij}) / (\max_i x_{ij} - \min_i x_{ij})$
Por la suma	$r_{ij} = x_{ij} / \sum_i x_{ij}$
Euclídea	$r_{ij} = x_{ij} / \sqrt{\sum_i x_{ij}^2}$

El método elegido puede cambiar el resultado final, y por eso hay que declararlo. No es un paso técnico neutro.

Los criterios que se minimizan —coste, tiempo— se convierten en criterios a maximizar cambiando el signo o tomando $1 - r_{ij}$.

6.2.2 Pesos

Cuánto importa cada criterio. Formas de obtenerlos:

Método	Cómo
Asignación directa	el decisor los da
Ordenación	se ordenan los criterios y se traduce el orden a pesos
Comparación por pares	se comparan de dos en dos; es lo que hace AHP
Entropía	se derivan de la dispersión de los datos, sin decisor

6.3 Dominancia y eficiencia

Antes de aplicar ningún método se puede cribar. La alternativa a **domina** a b si es al menos igual de buena en todos los criterios y estrictamente mejor en alguno.

Las **alternativas dominadas se descartan**: ningún decisor razonable las elegiría. Las que quedan forman el conjunto eficiente, y ahí ya no hay criterio objetivo que las ordene.

6.4 MAUT

Teoría de la utilidad multiatributo. Construye una **función de utilidad** que resume todos los criterios en un número.

$$U(a_i) = \sum_{j=1}^n w_j u_j(x_{ij})$$

con u_j la utilidad parcial del criterio j , normalizada entre 0 y 1. Se elige la alternativa de mayor U .

Las funciones u_j recogen la actitud del decisor ante cada criterio, igual que la utilidad del tema 5: cóncava si la mejora marginal decrece —los primeros euros de ahorro valen más que los últimos—, lineal si es proporcional.

La forma aditiva exige independencia entre criterios, y es su condición más exigente. Si dos criterios interaccionan —la calidad importa más cuanto mayor es el precio— la suma ponderada no representa las preferencias y hace falta una forma multiplicativa.

Ventajas	Inconvenientes
da un valor y una ordenación completa	exige construir las utilidades parciales
base teórica sólida	supone independencia entre criterios
fácil de comunicar	compensa totalmente: un criterio muy malo se tapa con otros buenos

La última es lo que se llama **compensación total**, y no siempre es aceptable: un proveedor con un plazo inadmisibile no se salva por ser barato.

6.5 PROMETHEE

Método de superación. En vez de agregar en una utilidad, **compara las alternativas por pares** y mide cuánto supera cada una a las demás.

Paso	Qué se hace
1	para cada par (a, b) y criterio j , calcular la diferencia $d_j = x_{aj} - x_{bj}$
2	aplicar una función de preferencia $P_j(d)$, entre 0 y 1
3	agregar con los pesos: $\pi(a, b) = \sum_j w_j P_j(d_j)$
4	calcular los flujos de superación

Los flujos:

$$\phi^+(a) = \frac{1}{m-1} \sum_{b \neq a} \pi(a, b), \quad \phi^-(a) = \frac{1}{m-1} \sum_{b \neq a} \pi(b, a)$$

$$\phi(a) = \phi^+(a) - \phi^-(a)$$

- ϕ^+ mide cuánto supera a a las demás: su fuerza.
- ϕ^- mide cuánto la superan a ella: su debilidad.
- ϕ es el flujo neto, y ordena de mayor a menor.

PROMETHEE I ordena solo parcialmente, con ϕ^+ y ϕ^- por separado, y admite que dos alternativas sean incomparables. **PROMETHEE II** usa el flujo neto y ordena todas, a costa de forzar una comparación que los datos no sostienen.

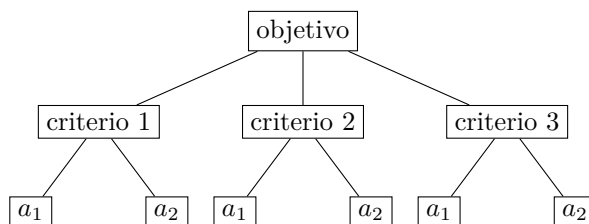
Lo característico del método son las **funciones de preferencia**: permiten declarar un umbral de indiferencia —diferencias pequeñas que no cuentan— y uno de preferencia estricta. Con ellas se evita que una diferencia de un euro decida entre dos ofertas, que es lo que ocurre con una suma ponderada.

Y su rasgo de fondo: **no compensa del todo**. Una alternativa mala en un criterio recibe una superación negativa que las demás no borran por completo.

6.6 AHP

Proceso analítico jerárquico. Su aportación es **cómo obtener los pesos**, y lo hace comparando de dos en dos.

6.6.1 La jerarquía



6.6.2 Comparación por pares

El decisor compara cada par de criterios con la escala de Saaty:

Valor	Significado
1	igual importancia
3	importancia moderada de uno sobre otro
5	importancia fuerte
7	importancia muy fuerte
9	importancia extrema

Con los pares 2, 4, 6 y 8 como valores intermedios. Se construye la matriz **A** con a_{ij} el juicio y $a_{ji} = 1/a_{ij}$, y los pesos salen del **vector propio** asociado al mayor valor propio de **A**.

6.6.3 Consistencia

Es lo que distingue a AHP: **comprueba si los juicios son coherentes**. Si el decisor dice que A es 3 veces mejor que B y B es 2 veces mejor que C, debería decir que A es 6 veces mejor que C.

$$IC = \frac{\lambda_{\text{máx}} - n}{n - 1}, \quad RC = \frac{IC}{IA}$$

con IA el índice aleatorio tabulado según n . Si $RC < 0,1$ los juicios se consideran aceptables; si no, hay que revisarlos.

Esa comprobación es su ventaja principal: los demás métodos aceptan los pesos que se les den, sin poder decir si son contradictorios.

Ventajas	Inconvenientes
pesos a partir de comparaciones sencillas	$n(n - 1)/2$ comparaciones por nivel: crece deprisa
mide la consistencia	la escala de 1 a 9 es discreta y arbitraria

Ventajas	Inconvenientes
admite criterios cualitativos estructura jerárquica clara	inversión de rango al añadir una alternativa

La **inversión de rango** es su crítica más seria: añadir una alternativa irrelevante puede cambiar el orden entre las que ya estaban, que es el mismo defecto que el criterio de Savage del tema 5.

6.7 Comparación

	MAUT	PROMETHEE	AHP
Enfoque	utilidad agregada	superación por pares	comparación jerárquica
Compensación	total	parcial	total
Resultado	valor y orden completo	orden parcial o completo	valor y orden completo
Qué exige	funciones de utilidad	umbrales y funciones de preferencia	juicios por pares
Punto fuerte	fundamento teórico	umbrales realistas	consistencia comprobada

Ningún método es el correcto. Aplicados a los mismos datos pueden dar órdenes distintos, y por eso el informe debe declarar qué método, qué normalización y qué pesos se han usado. Un análisis multicriterio que solo publica el resultado no es verificable.

Y una comprobación que conviene hacer siempre: repetir el análisis variando los pesos y ver si el ganador cambia. Si el resultado es estable, la recomendación es sólida; si depende de la tercera cifra de un peso, no lo es.

El tratamiento de la decisión multicriterio discreta sigue a Romero, 1993, Barba-Romero, 1997 y Ríos et al., 1989; los métodos de superación y su comparación, a Ehrgott, 2005.

Teoría de juegos

Tema 7 del programa. Decidir cuando el resultado depende también de lo que elija otro, que además elige buscando su propio beneficio.

7.1 Introducción

En el tema 5 los estados los producía la naturaleza, que no tiene intereses. Aquí el otro lado **elige**, y elige contra ti. Eso cambia el análisis: no se puede suponer un estado y optimizar, porque el otro reacciona a lo que hagas.

7.1.1 Elementos

Elemento	Qué es
Jugadores	quienes deciden, $1, \dots, n$
Estrategias	lo que cada jugador puede hacer
Pagos	lo que obtiene cada jugador según lo que hagan todos
Información	qué sabe cada uno al decidir

Se supone que todos son **racionales** —maximizan su propio pago— y que esa racionalidad es **conocimiento común**: todos la suponen de todos, y saben que los demás la suponen.

7.1.2 Clasificación

Criterio	Tipos
Cooperación	cooperativos, no cooperativos
Suma de pagos	suma cero, suma no nula
Momento de decidir	simultáneos, secuenciales
Información	completa, incompleta; perfecta, imperfecta
Repetición	de una etapa, repetidos

En un juego de **suma cero** lo que gana uno lo pierde el otro: no hay ganancia conjunta posible y el conflicto es total. En uno de **suma no nula** puede haber resultados mejores para todos, y de ahí que tenga sentido cooperar.

7.2 Juegos no cooperativos

Cada jugador decide por su cuenta y no hay acuerdos vinculantes.

7.2.1 Representación

En forma **normal**, con una matriz de pagos. Con dos jugadores, cada casilla lleva el par (pago del jugador 1, pago del jugador 2):

	B_1	B_2
A_1	(3, 2)	(1, 4)
A_2	(2, 1)	(4, 3)

En forma **extensiva**, con un árbol, cuando las decisiones son secuenciales.

7.2.2 Dominancia

Una estrategia está **dominada** si otra da al mismo jugador un pago mayor haga lo que haga el rival. Un jugador racional nunca la usa, así que se elimina y el juego se simplifica. Eliminando iterativamente se resuelven muchos juegos sin más herramientas.

7.2.3 Equilibrio de Nash

Un perfil de estrategias es un **equilibrio de Nash** si ningún jugador mejora cambiando él solo de estrategia.

En el ejemplo, (A_2, B_2) con pagos (4, 3): si el jugador 1 se mueve a A_1 pasa de 4 a 1; si el 2 se mueve a B_1 pasa de 3 a 1. Es equilibrio.

Dos advertencias:

- **Puede no ser eficiente.** El dilema del prisionero es el caso conocido: el único equilibrio deja a los dos peor de lo que estarían cooperando, y aun así ninguno se mueve por su cuenta.
- **Puede haber varios, o ninguno en estrategias puras.** Lo segundo es lo que obliga a introducir las estrategias mixtas.

Teorema de Nash. Todo juego finito tiene al menos un equilibrio, admitiendo estrategias mixtas.

7.2.4 Estrategias mixtas

Una **estrategia mixta** es una distribución de probabilidad sobre las puras: se elige al azar con probabilidades fijadas.

Tiene sentido porque **ser previsible es explotable**. En un juego de suma cero, si el rival conoce tu estrategia la neutraliza; aleatorizar impide que lo haga.

El pago de una estrategia mixta es el valor esperado, y en el equilibrio cada jugador elige las probabilidades que dejan **indiferente al rival** entre sus propias estrategias. Esa condición de indiferencia es lo que permite calcularlas.

7.3 El teorema minimax de Von Neumann

Para juegos de **suma cero** con dos jugadores. Con la matriz de pagos del jugador 1, que son las pérdidas del 2:

Jugador	Qué hace	Valor
1, que maximiza	asegura al menos $\max_i \min_j a_{ij}$	valor maximin
2, que minimiza	asegura como mucho $\min_j \max_i a_{ij}$	valor minimax

Siempre se cumple $\text{maximin} \leq \text{minimax}$.

- Si son **iguales**, ese valor común es el **valor del juego** y el juego tiene **punto de silla**: hay solución en estrategias puras.
- Si son distintos, no hay punto de silla y hay que recurrir a estrategias mixtas.

Teorema minimax. En todo juego finito de suma cero con dos jugadores, admitiendo estrategias mixtas, maximin y minimax coinciden. El juego tiene valor y cada jugador tiene una estrategia óptima.

Es el resultado fundacional de la teoría de juegos, de 1928, y es anterior al equilibrio de Nash, del que resulta ser un caso particular.

Ejemplo. Matriz de pagos del jugador 1:

	B_1	B_2	B_3	mín. fila
A_1	3	5	2	2
A_2	1	4	0	0
máx. col.	3	5	2	

Maximin = 2 y minimax = 2: coinciden. Hay punto de silla en (A_1, B_3) y el valor del juego es 2.

7.3.1 Relación con la programación lineal

Todo juego de suma cero con dos jugadores **se puede escribir como un problema lineal**, y el del otro jugador es su dual del tema 3. Esa correspondencia no es casual: la dualidad fuerte y el teorema minimax son el mismo resultado en dos lenguajes, y de ahí que los valores óptimos coincidan.

7.4 Juegos cooperativos

Los jugadores pueden formar **coaliciones** y comprometerse. El problema deja de ser qué hace cada uno y pasa a ser **cómo se reparte lo que consiguen juntos**.

7.4.1 Función característica

$v(S)$ es lo que la coalición S puede garantizarse por sí sola, con $v(\emptyset) = 0$. Un juego es **superaditivo** si

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T) \quad \text{para } S \cap T = \emptyset$$

es decir, unirse nunca perjudica. Bajo superaditividad la gran coalición de todos los jugadores es la que más genera, y el problema es solo repartir.

7.4.2 Axiomática del reparto

Un reparto es un vector $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ que debe cumplir:

Propiedad	Expresión	Qué dice
Eficiencia	$\sum_i x_i = v(N)$	se reparte todo lo generado
Racionalidad individual	$x_i \geq v(\{i\})$	a nadie le compensa irse solo
Racionalidad de coalición	$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$	a ningún grupo le compensa separarse

7.4.3 El núcleo

El **núcleo** es el conjunto de repartos que cumplen las tres condiciones a la vez.

Sus dos problemas:

- **Puede estar vacío.** Entonces ninguna reparto es estable: siempre hay una coalición con incentivo para romper la gran coalición.
- **Puede ser muy grande.** Entonces no dice cuál elegir, solo cuáles son admisibles.

7.4.4 El valor de Shapley

Da **un único** reparto, y sale de una idea concreta: cada jugador recibe su contribución marginal media a las coaliciones, promediando sobre todos los órdenes posibles de incorporación.

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(n - |S| - 1)!}{n!} [v(S \cup \{i\}) - v(S)]$$

Es el único reparto que cumple estos cuatro axiomas:

Axioma	Qué dice
Eficiencia	se reparte todo
Simetría	dos jugadores con la misma contribución reciben lo mismo
Jugador nulo	quien no aporta nada recibe cero
Aditividad	el valor de la suma de dos juegos es la suma de los valores

Ejemplo con tres jugadores. Con $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$, $v(\{1, 2\}) = 90$, $v(\{1, 3\}) = 60$, $v(\{2, 3\}) = 30$ y $v(\{1, 2, 3\}) = 120$, se recorren los $3! = 6$ órdenes de entrada y se promedia la contribución marginal de cada uno:

Orden	Jugador 1	Jugador 2	Jugador 3
1, 2, 3	0	90	30
1, 3, 2	0	60	60
2, 1, 3	90	0	30
2, 3, 1	90	0	30
3, 1, 2	60	60	0

Orden	Jugador 1	Jugador 2	Jugador 3
3, 2, 1	90	30	0
Suma	330	240	150
Shapley	55	40	25

Las tres cantidades suman 120, que es $v(N)$: se cumple la eficiencia.

El valor de Shapley **puede quedar fuera del núcleo** cuando este no está vacío. Son dos criterios distintos: el núcleo pide estabilidad frente a la ruptura, y Shapley pide justicia en el reparto de la contribución. No siempre coinciden.

Su uso práctico va más allá del reparto de beneficios: se aplica al reparto de costes comunes, a medir el poder de voto en un órgano colegiado y, más recientemente, a atribuir la contribución de cada variable en un modelo predictivo.

El tratamiento de la teoría de juegos sigue a Pérez Navarro et al., 2005 y Aguado Franco, 2007; los juegos cooperativos y el valor de Shapley, también a Ríos-Insua et al., 2004.

Programación multiobjetivo

Tema 8 del programa, y último. Optimizar varios objetivos a la vez sobre una región continua: soluciones Pareto-óptimas, cómo generarlas y cómo elegir entre ellas.

8.1 Aspectos básicos

$$\text{Opt. } [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})] \quad \text{s.a. } \mathbf{x} \in S$$

Con $k > 1$, el **problema no tiene solución en el sentido habitual**: salvo que los objetivos no entren en conflicto, no hay un punto que optimice todos a la vez.

La diferencia con el tema 6, que conviene repetir: allí las alternativas eran un conjunto finito ya dado, y aquí son una región continua definida por restricciones.

8.1.1 Dos espacios

Hay que distinguirlos porque el análisis salta de uno a otro:

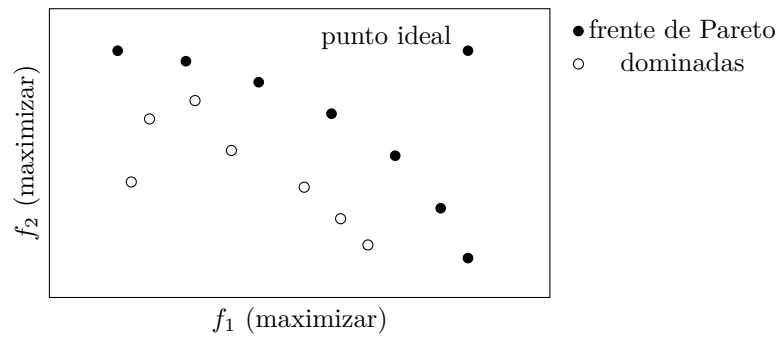
Espacio	Qué contiene
De decisión	los $\mathbf{x}$ de la región factible S , en $\mathbb{R}^n$
De objetivos	los vectores $(f_1(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x}))$, en $\mathbb{R}^k$

La región factible vive en el primero y el frente de Pareto se dibuja en el segundo. Dos soluciones muy distintas en decisión pueden ser casi iguales en objetivos, y al revés.

8.2 Soluciones Pareto-óptimas

$\mathbf{x}^*$ es **Pareto-óptima** o eficiente si no existe otra solución factible que mejore algún objetivo sin empeorar ninguno.

Formalmente, para maximización: no existe $\mathbf{x} \in S$ con $f_j(\mathbf{x}) \geq f_j(\mathbf{x}^*)$ para todo j y desigualdad estricta en alguno.



Los puntos rellenos forman el **frente de Pareto**: mejorar un objetivo exige empeorar el otro. Los huecos están dominados y ningún decisor razonable los elegiría.

8.2.1 Puntos de referencia

Punto	Cómo se calcula	Qué es
Ideal	optimizar cada objetivo por separado	lo mejor alcanzable en cada uno
Antiideal o nadir	el peor valor de cada objetivo dentro del frente	el extremo opuesto

El punto ideal **casi nunca es factible**: si lo fuera, no habría conflicto entre objetivos y el problema sería de un solo objetivo disfrazado. Su utilidad es servir de referencia para medir distancias, que es lo que hace la programación por compromiso.

Y un cuidado con el antiideal: se calcula **sobre el frente**, no sobre toda la región factible. Tomando el peor valor de cada objetivo en toda S sale un punto mucho más pesimista que no representa ninguna solución razonable.

8.3 Resolución gráfica con dos objetivos

Con dos variables y dos objetivos se resuelve dibujando, como en el tema 2:

Paso	Qué se hace
1	dibujar la región factible en el espacio de decisión
2	optimizar cada objetivo por separado y marcar dónde se alcanza
3	el frente eficiente es el tramo de frontera entre esos dos puntos
4	trasladar ese tramo al espacio de objetivos

En un problema lineal el frente está **en la frontera de la región factible**, y va del vértice que optimiza f_1 al que optimiza f_2 recorriendo las aristas intermedias. Los vértices de ese tramo son las **soluciones eficientes básicas**.

8.4 Técnicas generadoras

Producen soluciones eficientes sin pedir todavía las preferencias del decisor.

8.4.1 Método de las ponderaciones

Se convierte en un problema de un solo objetivo:

$$\text{máx } \sum_{j=1}^k w_j f_j(\mathbf{x}), \quad w_j > 0, \quad \sum_j w_j = 1$$

Variando los pesos se generan soluciones distintas del frente.

Propiedad	Alcance
Con $w_j > 0$, la solución es siempre eficiente	sí
Se alcanzan todas las eficientes	solo si el problema es convexo

La segunda limitación es la importante: en un problema no convexo hay soluciones eficientes situadas en las «hendiduras» del frente que **ninguna combinación de pesos alcanza**. El método las pierde y nada avisa de ello.

Y los objetivos deben normalizarse antes de ponderar, porque si están en unidades distintas el peso no significa lo que parece.

8.4.2 Método de las restricciones

Se optimiza un objetivo y los demás pasan a ser restricciones:

$$\text{máx } f_1(\mathbf{x}) \quad \text{s.a.} \quad f_j(\mathbf{x}) \geq \varepsilon_j, \quad j = 2, \dots, k, \quad \mathbf{x} \in S$$

Variando los ε_j se recorre el frente.

Su ventaja sobre las ponderaciones es que sí funciona en problemas no convexos: alcanza cualquier solución eficiente. Su coste es resolver un problema por cada combinación de valores de ε , que crece deprisa con k .

Además los multiplicadores de las restricciones añadidas son los precios sombra del tema 3 aplicados aquí: dicen **cuánto cuesta en f_1 exigir una unidad más de f_j** , que es exactamente la relación de intercambio entre objetivos.

8.4.3 Método simplex multicriterio

Adapta el simplex del tema 3 para generar todos los vértices eficientes de un problema lineal multiobjetivo. Da el frente completo en el caso lineal, y su coste crece mucho con el tamaño.

8.5 Programación por compromiso

Elige la solución **más próxima al punto ideal**. Se minimiza una distancia:

$$L_p(\mathbf{x}) = \left[\sum_{j=1}^k w_j^p \left(\frac{f_j^* - f_j(\mathbf{x})}{f_j^* - f_{j*}} \right)^p \right]^{1/p}$$

con f_j^* el valor ideal y f_{j*} el antiideal, que es lo que normaliza el cociente.

p	Qué minimiza	Comportamiento
1	la suma de las desviaciones	eficiencia: acepta que un objetivo quede muy mal si otros compensan
2	la distancia euclídea	intermedio
∞	la desviación máxima	equilibrio: reparte el sacrificio entre objetivos

Los dos extremos tienen nombre propio: con $p = 1$ se busca el mayor logro agregado, y con $p = \infty$ la solución más equilibrada, que es el criterio minimax aplicado a las desviaciones. **El conjunto de soluciones entre L_1 y L_∞ es el conjunto compromiso**, y suele ser una parte pequeña del frente, lo que ya es una ayuda para el decisor.

8.6 Programación por metas

Cambia el planteamiento: en vez de optimizar, **el decisor fija una meta t_j para cada objetivo** y se busca la solución que menos se desvíe de ellas.

Cada meta se escribe con dos variables de desviación:

$$f_j(\mathbf{x}) + d_j^- - d_j^+ = t_j, \quad d_j^-, d_j^+ \geq 0$$

con d_j^- la desviación por defecto y d_j^+ por exceso. **En el óptimo al menos una de las dos es cero:** no se puede quedar por encima y por debajo a la vez.

Qué se penaliza depende del tipo de meta:

Tipo de meta	Qué se minimiza
«al menos t_j »	d_j^-
«como mucho t_j »	d_j^+
«exactamente t_j »	$d_j^- + d_j^+$

8.6.1 Variantes

Programación por metas ponderada. Se minimiza la suma ponderada de las desviaciones no deseadas:

$$\min \sum_j (u_j d_j^- + v_j d_j^+)$$

Programación por metas lexicográfica. Las metas se agrupan en niveles de prioridad y se optimizan en orden: primero el nivel 1, y una vez alcanzado su mejor valor posible, se optimiza el

nivel 2 **sin empeorar el primero**.

La diferencia es de fondo: la ponderada **compensa** entre metas, y la lexicográfica **no**. Una meta de prioridad 2 nunca justifica sacrificar nada de la prioridad 1, por mucha ganancia que ofrezca.

8.6.2 Un aviso

La programación por metas **puede devolver una solución dominada** si las metas se fijan por debajo de lo alcanzable: se cumplen todas con desviación cero y el proceso se detiene, aunque existiera una solución mejor en todos los objetivos. La comprobación es directa: si todas las desviaciones son cero, hay que verificar la eficiencia de la solución obtenida.

8.7 Comparación

Enfoque	Cuándo se piden las preferencias	Qué produce
Ponderaciones y restricciones	después, sobre el frente	el frente eficiente
Compromiso	antes: pesos y p	una solución
Metas	antes: metas y prioridades	una solución
Métodos interactivos	durante, por etapas	una solución, refinada

Los **interactivos** son el punto intermedio: presentan una solución, el decisor indica en qué objetivo quiere mejorar y a costa de cuál, y el método genera otra. Es lo más realista cuando el decisor no sabe de antemano qué pesos quiere, que es lo habitual.

Y la conclusión que cierra la asignatura: **ningún método elimina la subjetividad de la decisión**.

Lo que hacen es separar lo que es análisis —qué soluciones son eficientes— de lo que es preferencia —cuál de ellas se elige—, y dejar la segunda parte explícita en vez de escondida en el modelo.

La programación multiobjetivo y las técnicas generadoras siguen a Romero, 1993 y Ehrgott, 2005; la programación por metas y por compromiso, también a Ríos-Insua et al., 2004 y Martín Martín, 2003.

Relación de ejercicios

Los diez ejercicios de programación lineal de la asignatura, sobre el tema 3: formas estándar y canónica, símplex, método de la M, dos fases y dualidad.

Todas las soluciones están comprobadas: se ha verificado que el punto propuesto cumple cada restricción, y que el problema es acotado buscando una dirección de mejora dentro de la región factible. **Un problema puede tener vértices y ser no acotado**, y eso es lo que ocurre en el ejercicio 4 a).

9.1 Formas estándar y canónica

Ejercicio 9.1.1. Expresa los problemas siguientes en forma estándar y canónica.

- a) máx $x + y$ s.a. $-x + y = 2$, $x + 2y \leq 6$, $2x + y \geq 6$, $x \geq 0$, $y \leq 0$.
- b) máx $2x + 3y + z$ s.a. $4x + 3y + z \leq 20$, $x + y \leq 20$, $x \geq 0$, $y \leq 0$.
- c) mín $x + y$ s.a. $-x + y \leq 2$.

Solución 9.1.1. Se aplican las conversiones del tema 2. Lo que hay que arreglar en los tres es el signo de y , con el cambio $y' = -y \geq 0$.

****a)**** Con $y' = -y$, el problema queda máx $x - y'$ sujeto a $-x - y' = 2$, $x - 2y' \leq 6$ y $2x - y' \geq 6$.

En ****forma canónica**** de maximización todas las restricciones van con $\leq$. La igualdad se parte en dos desigualdades y la de $\geq$ se gira:

$$\text{máx } x - y' \quad \text{s.a.} \quad \begin{cases} -x - y' \leq 2 \\ x + y' \leq -2 \\ x - 2y' \leq 6 \\ -2x + y' \leq -6 \\ x, y' \geq 0 \end{cases}$$

En ****forma estándar**** todas van con $=$, añadiendo una holgura a cada $\leq$ y restando un exceso a cada $\geq$:

$$\text{máx } x - y' \quad \text{s.a.} \quad \begin{cases} -x - y' = 2 \\ x - 2y' + s_1 = 6 \\ 2x - y' - s_2 = 6 \\ x, y', s_1, s_2 \geq 0 \end{cases}$$

****b)**** Con $y' = -y$ queda máx $2x - 3y' + z$ sujeto a $4x - 3y' + z \leq 20$ y $x - y' \leq 20$. Las dos

restricciones ya son $\leq$, así que **eso ya es la forma canónica**. La estándar añade dos holguras:

$$4x - 3y' + z + s_1 = 20, \quad x - y' + s_2 = 20$$

Y queda z **sin restricción de signo**, porque el enunciado no la impone: hay que escribir $z = z^+ - z^-$ con los dos no negativos.

c) $\min x + y$ con $-x + y \leq 2$, y **ninguna variable tiene restricción de signo**. Se escriben $x = x^+ - x^-$ e $y = y^+ - y^-$:

$$\min (x^+ - x^-) + (y^+ - y^-) \quad \text{s.a.} \quad -x^+ + x^- + y^+ - y^- + s_1 = 2$$

con las cinco variables no negativas. Y el problema es **no acotado**: tomando $x \rightarrow -\infty$ con y fijo, la restricción se sigue cumpliendo y el objetivo baja sin límite.

9.2 Simplex

Ejercicio 9.2.1. Resuelve mediante el método simplex:

$$\max -x + y \quad \text{s.a.} \quad -2x + y \leq 4, \quad x + y \leq 1, \quad y \geq 0$$

Solución 9.2.1. x no tiene restricción de signo, así que se escribe $x = x^+ - x^-$.

El óptimo es $x = -1$, $y = 2$, con $z = 3$.

Comprobación: $-2(-1) + 2 = 4$, que se cumple con igualdad; $-1 + 2 = 1$, también con igualdad. Las dos restricciones están activas, que es lo que caracteriza a un vértice con dos variables.

Y está acotado: cualquier dirección de mejora tendría que aumentar y o disminuir x , y la primera restricción impide lo segundo sin límite.

Ejercicio 9.2.2. Resuelve el problema siguiente indicando las soluciones óptimas y el valor de la función objetivo en cada una:

$$\text{Opt. } x - 2y + 3z \quad \text{s.a.} \quad x + 2y + z \leq 4, \quad 2x + y - z \leq 2, \quad x, y, z \geq 0$$

Solución 9.2.2. El enunciado dice «Opt.», así que se resuelven los dos sentidos.

| | Solución | z | | — | — | — | | Máximo | $(0, 0, 4)$ | 12 | | Mínimo | $(0, 2, 0)$ | -4 |

Comprobación del máximo: $0 + 0 + 4 = 4$ y $0 + 0 - 4 = -4 \leq 2$. La segunda restricción **no está activa**, así que su variable de holgura es básica y su precio sombra es cero.

Comprobación del mínimo: $0 + 4 + 0 = 4$ y $0 + 2 - 0 = 2$: las dos activas.

Ejercicio 9.2.3. Resuelve:

a) $\max 3x + 2y + z$ s.a. $2x - 3y + 2z \leq 3$, $-x + y + z \leq 5$, $x, y, z \geq 0$.

b) $\max 3x + y + 4z$ s.a. $6x + 3y + 5z \leq 25$, $3x + 4y + 5z \leq 20$, $x, y, z \geq 0$.

Solución 9.2.3. **a)** El problema es no acotado, y conviene detenerse en él porque es el caso que más se falla: tiene vértices, y evaluando la función objetivo en todos ellos sale un máximo aparente de 10 en $(0, 5, 0)$.

La solución es **160 perales y ningún naranjo ni manzano**, con beneficio 4000.

Comprobación: superficie $4 \cdot 160 = 640 \text{ m}^2$, que se agota; horas $5 \cdot 160 = 800 \leq 900$, así que **sobran 100 horas**.

El resultado se entiende mirando el beneficio por metro cuadrado, que es el recurso que se agota:

Árbol	Beneficio	m^2	Beneficio por m^2		—		—		—		—		Naranja	50	16	3,13		Peral	25	4	**6,25**		Manzano	20	8	2,50
-------	-----------	--------------	----------------------------	--	---	--	---	--	---	--	---	--	---------	----	----	------	--	-------	----	---	----------	--	---------	----	---	------

El peral gana con holgura, y como la restricción de horas no llega a ser limitante, la solución consiste en dedicar toda la parcela a perales. **Que el óptimo esté en un solo producto es lo normal en programación lineal**, y es una de las razones por las que un modelo así se completa después con restricciones de diversificación.

Ejercicio 9.3.3. Una empresa monta motocicletas de 500, 250, 125 y 50 c.c. en cuatro departamentos. Las horas de mano de obra que necesita cada modelo:

Chasis	Pintura	Montaje	Calidad		—		—		—		—		500 c.c.	8	6	8	4		250 c.c.	6	3	8	2		125 c.c.	4	2	6	2		50 c.c.	2	1	4	2
--------	---------	---------	---------	--	---	--	---	--	---	--	---	--	----------	---	---	---	---	--	----------	---	---	---	---	--	----------	---	---	---	---	--	---------	---	---	---	---

Hay 25 trabajadores en chasis, 18 en pintura, 30 en montaje y 10 en calidad, con jornadas de 8 horas. Los márgenes son 200 000, 140 000, 80 000 y 40 000 pesetas.

¿Cuál es la combinación óptima?

Solución 9.3.3. Variables: x_1, x_2, x_3, x_4 motocicletas de cada cilindrada. Las capacidades son el número de trabajadores por 8 horas:

Departamento	Capacidad		—		—		Chasis	$25 \times 8 = 200$		Pintura	$18 \times 8 = 144$		Montaje	$30 \times 8 = 240$		Calidad	$10 \times 8 = 80$
--------------	-----------	--	---	--	---	--	--------	---------------------	--	---------	---------------------	--	---------	---------------------	--	---------	--------------------

$$\text{máx } 200000x_1 + 140000x_2 + 80000x_3 + 40000x_4$$

$$\text{s.a. } \begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 200 \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 144 \\ 8x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 4x_4 \leq 240 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 80 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

La solución es **10 motocicletas de 500 c.c. y 20 de 250 c.c.**, con beneficio 4 800 000 pesetas.

Comprobación del uso de cada departamento:

Departamento	Uso	Capacidad	Holgura		—		—		—		—		Chasis	$80 + 120 = 200$	200		**0**		Pintura	$60 + 60 = 120$	144	24		Montaje	$80 + 160 = 240$	240		**0**		Calidad	$40 + 40 = 80$	80		**0**
--------------	-----	-----------	---------	--	---	--	---	--	---	--	---	--	--------	------------------	-----	--	-------	--	---------	-----------------	-----	----	--	---------	------------------	-----	--	-------	--	---------	----------------	----	--	-------

Y el beneficio: $200000 \cdot 10 + 140000 \cdot 20 = 2\,000\,000 + 2\,800\,000 = 4\,800\,000$.

Tres departamentos se agotan y solo sobra capacidad en pintura, que por tanto tiene precio sombra cero: **contratar a un pintor más no aumentaría el beneficio**. Es la holgura complementaria del tema 3 leída sobre un caso concreto.

9.4 Método de la M grande

Ejercicio 9.4.1. Resuelve con el método de la M grande:

- a) máx $3x_1 + 6x_2$ s.a. $x_1 + 4x_2 \leq 5$, $-x_1 + 3x_2 \leq -2$, $x_1 - 5x_2 \leq -2$, $x_1, x_2 \geq 0$.
 b) máx $4,5x_1 + 3x_2 + 1,5x_3$ s.a. $x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 4$, $2x_1 - x_2 + x_3 = 8$, $x_1 - x_2 \leq 6$, $x_i \geq 0$.
 c) mín $x_1 + x_2$ s.a. $x_1 + x_2 \geq 6$, $4x_1 + 2x_2 \geq 6$, $x_1, x_2 \geq 0$.

Solución 9.4.1. **a) El problema es infactible.** Se ve sin necesidad de tabla, combinando la segunda y la tercera restricción:

$$-x_1 + 3x_2 \leq -2 \implies x_1 \geq 3x_2 + 2$$

$$x_1 - 5x_2 \leq -2 \implies x_1 \leq 5x_2 - 2$$

Las dos juntas exigen $3x_2 + 2 \leq 5x_2 - 2$, es decir $x_2 \geq 2$, y entonces $x_1 \geq 8$. Pero la primera restricción pide $x_1 + 4x_2 \leq 5$, y con esos valores el lado izquierdo vale al menos $8 + 8 = 16$.

Con el método de la M, la infactibilidad se reconoce porque al terminar queda una variable artificial con valor positivo en la base.

b) Óptimo en $x_1 = 0$, $x_2 = 12$, $x_3 = 20$, con $z = 66$.

Comprobación: $0 + 24 - 20 = 4$, activa; $0 - 12 + 20 = 8$, la igualdad se cumple; $0 - 12 = -12 \leq 6$, con holgura. Y $3 \cdot 12 + 1,5 \cdot 20 = 36 + 30 = 66$.

Aquí la artificial hace falta por la restricción de igualdad, y al terminar vale cero, que es lo que confirma que la solución es del problema original.

c) Óptimo con $z = 6$, y **hay infinitas soluciones óptimas**: todo el segmento de la recta $x_1 + x_2 = 6$ que cumple $4x_1 + 2x_2 \geq 6$ da el mismo valor.

La razón es que el vector de coeficientes del objetivo, $(1, 1)$, es **paralelo** al de la primera restricción. En la tabla óptima se reconoce porque una variable no básica tiene coste reducido cero.

9.5 Método de las dos fases

Ejercicio 9.5.1. Resuelve con el método de las dos fases:

- a) mín $20x_1 + 25x_2$ s.a. $2x_1 + 3x_2 \geq 18$, $x_1 + 3x_2 \geq 12$, $4x_1 + 3x_2 \geq 24$, $x_1, x_2 \geq 0$.
 b) máx $4x_1 + 3x_2$ s.a. $3x_1 + 4x_2 \leq 12$, $x_1 + x_2 \geq 4$, $4x_1 + 2x_2 \leq 8$, $x_1, x_2 \geq 0$.
 c) máx $x_1 - 2x_2 + 3x_3$ s.a. $x_1 + x_2 + x_3 = 6$, $x_3 \leq 2$, $x_i \geq 0$.

Solución 9.5.1. **a)** Las tres restricciones son $\geq$, así que las tres necesitan variable de exceso y variable artificial. En forma estándar:

$$\text{mín } 20x_1 + 25x_2 \quad \text{s.a.} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - s_1 + t_1 = 18 \\ x_1 + 3x_2 - s_2 + t_2 = 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - s_3 + t_3 = 24 \\ \text{todas} \geq 0 \end{cases}$$

Fase 1: se minimiza $w = t_1 + t_2 + t_3$ hasta llegar a $w = 0$, lo que indica que existe solución factible.

****Fase 2:**** partiendo de esa base se optimiza el objetivo original. El óptimo es

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 4, \quad z = 160$$

Comprobación: $6 + 12 = 18$, activa; $3 + 12 = 15 \geq 12$, con holgura; $12 + 12 = 24$, activa. Y $20 \cdot 3 + 25 \cdot 4 = 60 + 100 = 160$.

La segunda restricción no está activa, así que su precio sombra es cero: relajarla no abarata la solución.

****b)** El problema es infactible**, y la fase 1 termina con $w > 0$.

Se comprueba directamente: de $4x_1 + 2x_2 \leq 8$ sale $2x_1 + x_2 \leq 4$. Como $x_1 \geq 0$, eso obliga a $x_2 \leq 4$. Con $x_1 + x_2 \geq 4$ y $x_2 \leq 4$, el único margen es $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, que sí cumple la tercera. Pero la primera pide $3 \cdot 0 + 4 \cdot 4 = 16 \leq 12$, que es falso.

****Es el caso que justifica el método de las dos fases frente al de la M:**** aquí la respuesta es inequívoca —la fase 1 no alcanza cero— mientras que con la M grande hay que interpretar si una artificial queda positiva por infactibilidad o por un problema numérico del valor de M .

****c)**** La primera restricción es de igualdad, así que lleva artificial; la segunda es $\leq$ y lleva holgura. En forma estándar:

$$x_1 + x_2 + x_3 + t_1 = 6, \quad x_3 + s_1 = 2$$

Óptimo en $x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, con $z = 10$.

Comprobación: $4 + 0 + 2 = 6$ y $x_3 = 2 \leq 2$, las dos activas. Y $4 - 0 + 6 = 10$.

El resultado es el que sugiere el objetivo: x_3 es la variable de coeficiente mayor y se lleva al máximo que permite su cota, x_2 penaliza y se queda en cero, y el resto del presupuesto de la igualdad se completa con x_1 .

9.6 Dualidad

Ejercicio 9.6.1. Dados los siguientes problemas primales, encuentra sus duales asociados.

- a) máx $6x_1 + 4x_2$ s.a. $x_1 \leq 700$, $3x_1 + x_2 \leq 2400$, $x_1 + 2x_2 \leq 1600$, $x_1, x_2 \geq 0$.
- b) máx $4,5x_1 + 3x_2 + 1,5x_3$ s.a. $x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 4$, $2x_1 - x_2 + x_3 = 8$, $x_1 - x_2 \leq 6$, $x_i \geq 0$.
- c) mín $6x_1 + 4x_2$ s.a. $x_1 \leq 700$, $3x_1 + x_2 \geq 2400$, $x_1 + 2x_2 \leq 1600$, $x_1, x_2 \geq 0$.

Solución 9.6.1. Se aplica la tabla de correspondencias del tema 3: cada restricción del primal da una variable del dual, y cada variable del primal da una restricción.

****a)**** Primal de maximización con tres restricciones $\leq$ y dos variables ≥ 0 . El dual es de minimización, con tres variables ≥ 0 y dos restricciones $\geq$:

$$\text{mín } w = 700y_1 + 2400y_2 + 1600y_3 \quad \text{s.a.} \quad \begin{cases} y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 6 \\ y_2 + 2y_3 \geq 4 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Los coeficientes de las restricciones duales son las ****columnas**** de la matriz original: eso es lo que significa trasponer.

****b)**** Igual, salvo que la segunda restricción del primal es una ****igualdad****, y por tanto su variable dual queda ****libre de signo****:

$$\text{mín } w = 4y_1 + 8y_2 + 6y_3 \quad \text{s.a.} \quad \begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 4,5 \\ 2y_1 - y_2 - y_3 \geq 3 \\ -y_1 + y_2 \geq 1,5 \\ y_1, y_3 \geq 0, \quad y_2 \text{ libre} \end{cases}$$

****c)**** El primal es de ****minimización**** y tiene restricciones en los dos sentidos, así que el dual es de maximización y los signos de sus variables no son todos iguales:

$$\text{máx } w = 700y_1 + 2400y_2 + 1600y_3 \quad \text{s.a.} \quad \begin{cases} y_1 + 3y_2 + y_3 \leq 6 \\ y_2 + 2y_3 \leq 4 \\ y_2 \geq 0, \quad y_1, y_3 \leq 0 \end{cases}$$

****La regla de los signos es la que más se falla.**** En un primal de minimización, una restricción $\geq$ da variable dual ≥ 0 y una $\leq$ da variable dual ≤ 0 ; en uno de maximización es al revés. Comprobarlo es inmediato: ****el dual del dual tiene que devolver el primal****, y si no lo hace, algún signo está cambiado.

Los ejercicios están planteados sobre el temario de Hillier y Lieberman, 1991 y Taha, 2004; el tratamiento de las formas y de la dualidad sigue a Goberna et al., 2004, y hay más problemas resueltos en Barbolla et al., 2001 y Martín Martín, 2003.

Bibliografía

- Aguado Franco, J. C. (2007). *Teoría de la decisión y de los juegos*. Delta.
- Barba-Romero, S. (1997). *Decisiones multicriterio: fundamentos teóricos y utilización práctica*. Universidad de Alcalá.
- Barbolla, R., Cerdá, E., & Sanz, P. (2001). *Optimización. Cuestiones, ejercicios y aplicaciones a la economía*. Prentice Hall.
- Bazaraa, M. S., Jarvis, J. J., & Sherali, H. D. (1998). *Programación y flujo de redes*. Limusa.
- Ehrgott, M. (2005). *Multicriteria Optimization*. Springer.
- Goberna, M. Á., Jornet, V., & Puente, R. (2004). *Optimización lineal. Teoría, métodos y modelos*. Addison Wesley.
- Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (1991). *Introducción a la Investigación de Operaciones*. McGraw Hill.
- Luenberger, D. G. (2005). *Linear and Nonlinear Programming*. Addison Wesley.
- Martín Martín, Q. (2003). *Investigación Operativa*. Prentice Hall.
- Pérez Navarro, J., Jimeno Pastor, J. L., & Cerdá Tena, E. (2005). *Teoría de juegos*. Pearson Educación.
- Ríos, S., Ríos-Insúa, M. J., & Ríos-Insúa, S. (1989). *Procesos de decisión multicriterio*. EUEMA.
- Ríos-Insua, S., Mateos, A., Bielza, M. C., & Jiménez, A. (2004). *Investigación Operativa. Modelos determinísticos y estocásticos*. Centro de Estudios Ramón Areces.
- Romero, C. (1993). *Teoría de la decisión multicriterio: conceptos, técnicas y aplicaciones*. Alianza Editorial.
- Taha, H. A. (2004). *Investigación de Operaciones*. Prentice Hall.